

IL
NUOVO CIMENTO
ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. IX, N. 11

Serie nona

1 Novembre 1952

Sulla distribuzione zenitale delle particelle degli sciami estesi.

P. BASSI, A. M. BIANCHI, D. CADORIN e C. MANDUCHI

Istituto di Fisica dell'Università, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 12 Agosto 1952)

Riassunto. — Si descrive una misura della distribuzione zenitale delle particelle degli sciami estesi dell'aria, eseguita con contatori. Assumendo una dipendenza dall'angolo zenitale della forma $\cos^n \theta$ si trova un valore di n fra 3 e 4. Se ne studia la dipendenza dalla quota, dalla densità dello sciamo e dall'angolo zenitale.

Per il progetto e l'interpretazione di esperienze sugli sciami estesi è spesso interessante la conoscenza della distribuzione zenitale delle loro particelle; la previsione teorica di questa riesce particolarmente difficile, in quanto richiede la conoscenza della natura e delle proprietà degli sciami stessi. È pertanto necessario affidarsi all'esperienza.

Si ammette in genere una distribuzione zenitale della forma $\cos^n \theta$ che sarebbe giustificabile per piccoli angoli nel caso di assorbimento esponenziale.

I risultati relativi al valore di n , ottenuti da diversi Autori, non sono facilmente confrontabili per la disparità dei metodi usati. Con camera di Wilson, DAUDIN ⁽¹⁾ a 2000 m s.l.m. e DEUTSCHMANN ⁽²⁾ al l.m. trovano $n = 8$; BROWN e MCKAY ⁽³⁾ a 3260 m s.l.m. ottengono $n = 5$ ed $n = 3$, rispettivamente per l'insieme delle particelle e per la sola componente penetrante. Con contatori,

⁽¹⁾ J. DAUDIN: *Journ. d. Phys.*, **6**, 302 (1945).

⁽²⁾ M. DEUTSCHMANN: *Zeits. Naturforsch.*, **2a**, 61 (1947).

⁽³⁾ W. W. BROWN e A. S. MCKAY: *Phys. Rev.*, **76**, 1034 (1949).

KRAYBILL (4) a 3500 m s.l.m. trova $n = 4$ per l'insieme mentre SITTE (5) ottiene $n = 4$ per la componente penetrante mediante un odoscopio a 3260 m s.l.m. fra 0° e 40° .

Le discordanze fra i valori citati sembrano attribuibili in gran parte al diverso metodo di selezione di tipo e di densità degli sciami, ed alle perturbazioni prodotte nella distribuzione zenitale dagli assorbitori usati.

Noi abbiamo eseguito misure a 2000 m s.l.m., presso il Laboratorio della Marmolada, ed al livello del mare, presso l'Istituto di Fisica di Padova, usando il metodo già applicato da KRAYBILL nell'esperienza a 3500 m s.l.m.

1. – Dispositivo sperimentale.

Il metodo usato per determinare la distribuzione zenitale degli sciami estesi sfrutta la diversa sensibilità che un comune dispositivo di contatori offre agli sciami provenienti da angoli zenithali diversi, quando si dispongano i contatori orizzontalmente, verticalmente e a 45° .

Il dispositivo consta di tre piatti di 1 o 6 contatori ciascuno, disposti ai vertici di un triangolo equilatero il cui lato era di m 4,50 alla Marmolada e di m 3,50 a Padova per compensare la variazione dell'unità di sciami con la quota. L'area utile dei contatori era di $4 \times 50 = 200 \text{ cm}^2$.

Abbiamo posto l'intensità direzionale delle particelle degli sciami estesi nella forma

$$i(\vartheta, \Delta) d\Omega d\Delta = A \Delta^{-(\gamma+1)} \cos^n \vartheta d\Delta d\Omega;$$

il valore di n si può pensare come un valore medio fra quelli caratteristici degli sciami di densità più probabilmente rivelabili dal dispositivo nelle due posizioni: A è la costante di normalizzazione; a γ abbiamo attribuito il valore 1,4 indipendente da Δ e dalla quota perché il calcolo indica che la dipendenza di n da γ non è critica.

L'intensità totale registrata dal dispositivo è quindi

$$I(n) = A \int_0^\infty \Delta^{-(\gamma+1)} d\Delta \int_{\Omega} (1 - \exp[-S\Delta])^3 \cos^n \vartheta d\Omega,$$

in cui $S(\vartheta, \varphi)$ è la proiezione della superficie sensibile di un piatto sul piano perpendicolare alla direzione di provenienza di uno sciamo.

Nel caso dei tre piatti di un solo contatore, le superficie sensibili, in giaci-

(4) H. L. KRAYBILL: *Phys. Rev.*, **77**, 410 (1950).

(5) K. SITTE: *Phys. Rev.*, **78**, 721 (1950).

tura orizzontale e verticale, sono rispettivamente:

$$S_{0^\circ}(\vartheta, \varphi) = S_0 |\sin \varphi \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta| + S_1 |\cos \varphi \sin \vartheta|$$

$$S_{90^\circ}(\vartheta, \varphi) = S_0 \sin \vartheta + S_1 \cos \vartheta,$$

dove S_0 è l'area della sezione longitudinale di un contatore ($4 \times 50 \text{ cm}^2$) ed S_1 è l'area delle due basi del contatore ($\pi \cdot 4 \text{ cm}^2$).

Il rapporto delle due intensità totali risulta pertanto

$$\frac{I_{0^\circ}(n)}{I_{90^\circ}(n)} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^n \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi/2} S_{0^\circ}(\vartheta, \varphi)^n d\varphi}{\int_0^{\pi/2} \cos^n \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi/2} S_{90^\circ}(\vartheta, \varphi)^n d\varphi}.$$

Nel caso dei tre piatti di sei contatori in giacitura orizzontale, l'area della superficie sensibile è data da

$$(1) \quad S_{0^\circ}(\vartheta, \varphi) = S_0 \cos \vartheta + S_1 |\sin \vartheta \sin \varphi| + S_2 |\cos \varphi \sin \vartheta|,$$

ove S_0 , S_1 , S_2 sono rispettivamente le aree delle superficie superiore e laterali di ogni piatto, come risulta dalla fig. 1. In giacitura verticale, la superficie sensibile è invece

$$S_{90^\circ}(\vartheta, \varphi) = S_0 |\sin \varphi \sin \vartheta| + S_1 \cos \vartheta + S_2 |\cos \varphi \sin \vartheta|.$$

Gli ultimi due termini della (1) sono molto minori del primo, e sono stati trascurati nei calcoli numerici.

Il rapporto delle intensità totali a piatti orizzontali e verticali risulta allora dall'espressione:

$$\frac{I_{0^\circ}}{I_{90^\circ}} = \frac{\frac{\pi}{2} S_0^n \int_0^{\pi/2} \cos^{(n+1)} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} \cos^n \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi/2} S_{90^\circ}(\vartheta, \varphi)^n d\varphi}$$

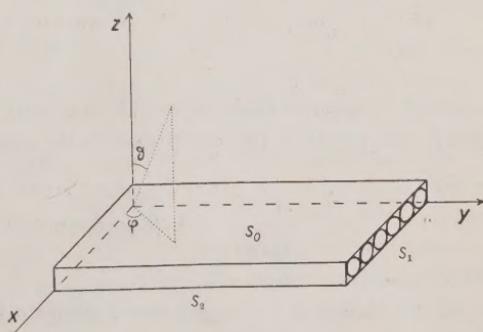
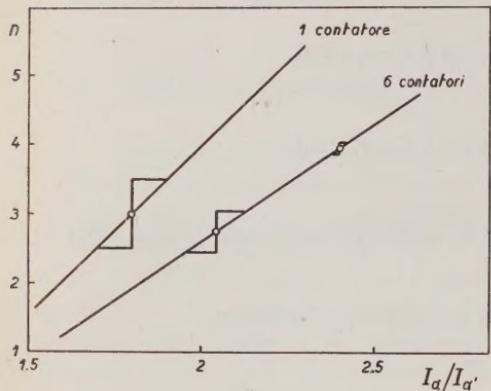


Fig. 1.

onde, dal confronto con i dati sperimentali, possiamo ricavare l'esponente n della dipendenza zenitale.

Per avere indicazioni sull'eventuale variazione di n con ϑ abbiamo eseguito misure con piatti a sei contatori, inclinati di 45° sull'orizzonte. Si ha, in tal caso, la seguente espressione per la funzione

$$S_{45^\circ}(\vartheta, \varphi) = \frac{S_0}{\sqrt{2}} |\sin \varphi \sin \vartheta + \cos \vartheta| + \frac{S_1}{\sqrt{2}} |\sin \varphi \sin \vartheta - \cos \vartheta| + S_2 |\cos \varphi \sin \vartheta|,$$



a)

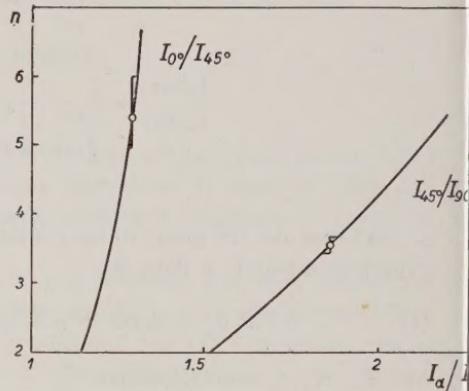


Fig. 2.

b)

e quindi i rapporti delle intensità con piatti orizzontali e verticali, rispetto a quelle con piatti a 45° , sono dati dalle espressioni:

$$\frac{I_{0^\circ}(n)}{I_{45^\circ}(n)} = \frac{2 \int_0^{\pi/2} \cos^n \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi/2} S_0(\vartheta, \varphi)^n d\varphi}{\int_0^{\pi/2} \cos^n \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_{45^\circ}(\vartheta, \varphi)^n d\varphi},$$

$$\frac{I_{45^\circ}(n)}{I_{90^\circ}(n)} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^n \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_{45^\circ}(\vartheta, \varphi)^n d\varphi}{2 \int_0^{\pi/2} \cos^n \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi/2} S_{90^\circ}(\vartheta, \varphi)^n d\varphi}.$$

È opportuno rilevare che il primo rapporto riguarda essenzialmente gli sciami verticali, e il secondo quelli più inclinati.

In fig. 2a, 2b sono riportati i grafici in funzione di n , e i risultati sperimentali.

2. - Risultati.

Abbiamo eseguito una misura del coefficiente barometrico a 2000 m col dispositivo a 6 contatori per piatto: il valore trovato è $10,1 \pm 0,5$, in accordo con altri Autori (⁶).

I risultati, descritti in tab. I sono stati normalizzati alla pressione di quota.

TABELLA I.

m s.l.m.	conta- tori per piatto	α	I_α	I_0/I_{90°	n	I_0/I_{5°	n	$I_{45^\circ}/I_{90^\circ}$	n
2000	6	0°	137,87 $\pm 1,05$						
	6	45°	106,43 $\pm 0,80$	2,40	3,95	3,95	5,4	1,85	3,55
	6	90°	57,52 $\pm 0,48$	$\pm 0,03$	$\pm 0,07$	$\pm 0,015$	$\pm 0,5$	$\pm 0,02$	$\pm 0,15$
	1	0°	10,76 $\pm 0,40$	1,80	2,80				
	1	90°	5,97 $\pm 0,23$	$\pm 0,10$	$\pm 0,30$				
	6	0°	2,45 $\pm 0,50$	2,05	3,00				
0	6	90°	1,19 $\pm 0,30$	$\pm 0,07$	$\pm 0,50$				

Con α si è indicate l'angolo fra la normale al piatto e la verticale; i valori di n sono dedotti dai rapporti fra le intensità, mediante i grafici di fig. 2a, 2b.

Le misure con $\alpha = 45^\circ$ sono state eseguite orientando il dispositivo a E e a W, con alternanza: è possibile, dai risultati così ottenuti, risalire ad un eventuale effetto EW, definito da

$$2 \frac{W - E}{W + E}.$$

Abbiamo concluso che tale effetto, se esiste, è inferiore al 3%.

(⁶) C. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, 7, 307 (1950).

Si può, inoltre, valutare γ per gli sciami osservati con dispositivo orizzontale e verticale confrontando le misure con piatti di aree diverse: il valore di γ risulta costante entro qualche per cento nei due casi.

3. - Discussione.

Il modello che generalmente è stato sinora usato per la trattazione quantitativa degli sciami estesi è quello a cascata elettrofotonica. Le conoscenze attuali portano ad escludere un'origine elettronica di essi ed a riferirli a nucleoni primari che inizierebbero una cascata di nucleoni e di mesoni π carichi e scarichi.

Le deduzioni dal modello elettrofotonico si sono trovate, in certi casi, in accordo coll'esperienza. Per il problema della distribuzione zenitale la trattazione sviluppata su questa base, e colle consuete ipotesi semplificative, da JÁNOSSY (⁷) e successivamente da BUDINI (⁸), porta a valori dell'esponente n compresi fra 15 e 18, per ϑ compreso fra 0° e 30° ; esperienze, eseguite in diverse condizioni, danno invece valori fra $n = 2$ e $n = 8$.

La nostra esperienza, oltre a confermare l'ordine di grandezza dell'esponente n , ha precisato la dipendenza di questo dalla quota d'osservazione, dalla densità A degli sciami e dall'angolo zenitale ϑ .

Le dipendenze osservate si possono così individuare e giustificare qualitativamente:

1) a parità di A , n cresce con l'altezza sul livello del mare: questo fatto si può ricondurre alla diminuzione nello sparpagliamento laterale delle particelle; il dato di KRAYBILL a 3500 m si accorda coi nostri a 2000 e a 0 m s.m.;

2) a parità di altezza n cala al crescere di A : ciò si spiega se si considera che gli sciami meno densi derivano in media da primari meno energici e quindi appaiono più collimati per l'assorbimento nell'aria sovrastante. Questa considerazione può forse contribuire a giustificare il valore $n = 3$ di BROVN e MCKAY per la componente penetrante (che è nella zona più densa degli sciami) rispetto al valore $n = 5$ osservato per l'insieme degli sciami, accanto a quella dello scattering e della produzione secondaria nell'assorbitore prospettate dagli stessi Autori;

3) n decresce al crescere dell'angolo zenitale ϑ : questa dipendenza si interpreta attribuendo agli assi degli sciami un valore di n elevato: l'andamento per piccoli angoli zenithali è connesso con questo esponente mentre ad angoli maggiori si fa sentire l'effetto dello sparpagliamento delle particelle.

(⁷) L. JÁNOSSY: *Cosmic Rays* (Oxford, 1950), p. 318.

(⁸) P. BUDINI: *Nuovo Cimento*, 8, 446 (1951).

Questa ultima considerazione mette in rilievo una possibile influenza della diversa definizione angolare dei rivelatori sulle discordanze fra i valori ottenuti da osservatori diversi.

Ringraziamo il Prof. A. ROSTAGNI e il Dott. P. BUDINI per utili discussioni.

SUMMARY (*)

Authors report about a measurement of the zenithal distribution of particles in extensive showers of the air performed with counters. Assuming a dependance from the zenithal angle of the form $\cos^n \theta$ a value of n is found between 3 and 4. Authors investigate its dependence from the height, the shower density and the zenithal angle.

(*) *Editor's translation.*

Sulla radioattività delle lave etnee.

S. MILONE TAMBURINO

Istituto di Fisica dell'Università - Catania

A. STELLA

Istituto di Mineralogia dell'Università - Catania

(ricevuto il 19 Agosto 1952)

Riassunto. — Mediante emulsioni nucleari e coi metodi delle sezioni sottili e degli strati di roccia polverizzata e compressa, è stata misurata l'attività radioattiva di diverse lave etnee. Si è trovato che l'attività radioattiva varia di un fattore 1,5 per lave emesse nelle varie fasi di una stessa colata e di un fattore 1,75 per lave di colate diverse, anche se distanti fra loro migliaia di anni. Si conclude quindi che la radioattività delle lave etnee non dipende sostanzialmente dall'età della colata. Si è trovato inoltre che gli elementi radioattivi si trovano in seno alla massa fondamentale e mai fanno parte dei fenocristalli. Si è misurata l'attività radioattiva della massa fondamentale delle varie colate e si è trovata una variazione massima di un fattore 1,51 fra lave di colate diverse. In media l'attività radioattiva della massa fondamentale ha un valore doppio di quello dell'attività radioattiva della corrispondente lava. Si è cercato di identificare a quali costituenti della massa fondamentale si associa la radioattività e sembra che almeno parte degli elementi radioattivi si associno all'apatite.

1. — Introduzione.

TROVATO CASTORINA⁽¹⁾ ⁽²⁾ ed ACCOLLA⁽³⁾ hanno misurato l'attività radioattiva di diverse lave etnee (esprimendola colla dispersione in volt-ora prodotta in un elettroscopio da 100 grammi di lava polverizzata ed asciutta). TROVATO CASTORINA avanza l'ipotesi che le lave etnee più antiche siano più radioattive

⁽¹⁾ G. TROVATO CASTORINA: *Boll. Acc. Gioenia*, fasc. 12, 21 (1910).

⁽²⁾ G. TROVATO CASTORINA: *Boll. Acc. Gioenia*, fasc. 86, 33 (1905).

⁽³⁾ G. ACCOLLA: *Boll. Acc. Gioenia*, fasc. 92, 22 (1907).

delle recenti, ma siccome non tutti i suoi risultati sperimentali si accordano con tale ipotesi, noi ci siamo proposte di studiare la variazione dell'attività radioattiva per lave di una stessa colata (1669) e per lave di diverse colate mediante il metodo delle emulsioni nucleari esposte a sezioni sottili ed a strati di lava polverizzata e compressa (4).

Abbiamo inoltre cercato di identificare a quali minerali costituenti le lave si associano gli elementi radioattivi.

2. - Misura dell'attività radioattiva di lave etnee emesse in varie fasi di una stessa colata.

Per poter discutere sulla variazione della radioattività delle lave in funzione dell'età delle colate, occorre anzitutto assicurarsi che la variazione della radioattività in seno ad una stessa colata sia traseurabile in confronto alla variazione che si ha per colate diverse. A tale scopo abbiamo esaminato campioni di lava emesse in varie fasi della colata del 1669, che durò dal 2 marzo a metà luglio e nella quale venne emessa una grande quantità di lava, circa un miliardo di m³.

In tabella I riportiamo le località dalle quali abbiamo prelevato i campioni e le date approssimative nelle quali tali località furono ricoperte dalle lave durante quell'eruzione (5).

Il prelevamento dei campioni è stato fatto sul posto, scegliendo pezzi di lava compatta. Poichè le lave storiche e probabilmente anche le preistoriche non hanno raggiunto l'equilibrio radioattivo, non è possibile calcolare il contenuto radioattivo delle lave in grammi di uranio e di torio per grammo di lava. Abbiamo perciò determinato l'attività radioattiva, espressa dal numero di particelle α più lunghe di 3 μ in emulsione, emesse per cm² e per secondo da superfici piane di strati di lava polverizzate e compresse messe a contatto coll'emulsione (4). Tali strati avevano uno spessore molto maggiore del percorso delle particelle α nelle lave, e quindi possono considerarsi come sorgenti spesse.

Per tale misura sono state adoperate emulsioni nucleari Ilford E₁ spesse 50 μ . La tecnica usata per l'esposizione delle lastre fotografiche agli strati di lava polverizzate e compresse, per lo sviluppo delle emulsioni nucleari, per l'esplorazione al microscopio e per la correzione delle α provenienti da sostanze radioattive presenti nelle lastre, è stata descritta in una precedente nota (4). Inoltre abbiamo fatto delle verifiche per accertarci che non si ha fading per le lastre esposte a bassa temperatura ed in recipienti con essiccatore, anche per esposizione di circa tre mesi.

(4) S. MILONE TAMBURINO e A. STELLA: *Nuovo Cimento*, 9, 253 (1952).

(5) W. S. F. von WALTERSHAUSEN: *Der Aetna* (Leipzig, 1880), p. 247.

Le lastre usate per tale misura sono state esposte e sviluppate contemporaneamente. La lava polverizzata, usata per fare gli strati di roccia polverizzata e compressa, è stata prelevata da 100 g di ogni tipo di lava triturata e ben rimescolata, quantità più che sufficiente per avere una buona omogeneità, data la grana delle lave esaminate, che è piuttosto piccola. I valori ottenuti per l'attività radioattiva, riportati in col. 3 tab. I, indicano un graduale aumento della radioattività della lava dall'inizio verso la fine della colata, e precisamente si ha una variazione di un fattore $1,49 \pm 0,07$ fra la fine della colata (Sciara Biscari) e l'inizio della colata (S. Giovanni Galermo).

TABELLA I. — Attività radioattiva di lave emesse in varie fasi della colata 1669.

Località	Data	Attività radioattiva $\alpha \geq 3 \mu \text{ cm}^2 \text{ s}$
S. Giovanni Galermo	11 marzo 1669	$5,15 \pm 0,14$
Cava Curia (Catania)	4 aprile »	$5,42 \pm 0,15$
Cava Daniele (Catania) . . .	15 aprile »	$6,00 \pm 0,16$
Sciara Biscari (Catania) . . .	29 aprile ÷ 15 luglio 1669	$7,69 \pm 0,19$

Ciò si spiega col fatto che la lava dell'inizio della colata (S. Giovanni Galermo) è più basica della lava della fine dalla colata (Sciara Biscari) (⁶) dato che, come è noto, la radioattività si associa maggiormente colle rocce acide che con quelle basiche. Inoltre confrontando le analisi chimiche di queste due lave (⁶) si nota che il termine P_2O_5 — al quale, come si vedrà nel paragrafo 7, si associano almeno in parte gli elementi radioattivi contenuti nelle lave — presenta per la lava della Sciara Biscari un valore 1,82 volte quello della lava di S. Giovanni Galermo: e ciò concorda con un aumento della radioattività fra le stesse lave per un fattore 1,49.

Si può quindi concludere che la radioattività della lava 1669 non è costante per tutta la colata, ma presenta, almeno nei punti presi in considerazione, una variazione di un fattore $1,49 \pm 0,07$.

I dati ottenuti per questa colata non si possono estendere alle altre colate, perché per lo più le varie colate etnee fuoriescono da bocche eruttive poste a quote diverse, hanno avuto durate molto differenti fra loro, come pure differisce la quantità di lava emessa nelle varie colate. Inoltre la diminuzione o l'aumento dell'acidità (e quindi il variare della radioattività) delle lave emesse nel corso di una stessa eruzione, può dipendere dalla quota alla quale si veri-

(⁶) F. STELLA STARABBA: *Atti. R. Acc. Peloritana, Classe Scienze*, **46**, 153 (1944).

ficiano le effusioni laviche. Così, per esempio, per la colata 1669 l'aumento dell'acidità della lava dall'inizio alla fine della colata, si può spiegare se si pensa che la bocca eruttiva sta a circa 700 m s.l.m., cioè parecchio più in basso del livello superiore della colonna magmatica entro il condotto dell'Etna. Dopo che il magma, in uno stadio preeruttivo, era già stato differenziato entro il condotto stesso, per l'influenza della gravità, si ebbe prima la fuoriuscita del magma corrispondente alla quota 700 m (magma più pesante, come si deduce anche dalla composizione chimica rivelata dall'analisi (*), per le maggiori percentuali di Fe e Mg, e per l'abbondanza dell'olivina ed augite contenute nella roccia) e solo successivamente si ebbe la fuoriuscita di magma proveniente da quote superiori a 700 m, più leggero e più acido.

TROVATO CASTORINA (¹) ha determinato l'attività radioattiva di vari campioni di lava della colata marzo-aprile 1910 ed ha trovato valori che differiscono fra loro al massimo per un fattore 1,5, eguale al fattore $1,49 \pm 0,07$ da noi trovato per la colata del 1669. Si può quindi concludere che la radioattività delle lave di una stessa colata può presentare una variazione di un fattore 1,5.

3. - Determinazione dell'attività radioattiva per lave etnee di diverse eruzioni.

Per tale misura abbiamo usato il metodo delle sezioni sottili, che abbiamo anche adoperato per cercare di identificare a quali costituenti delle lave si associano gli elementi radioattivi.

Le sezioni sottili, di $5 \div 7 \text{ cm}^2$ di superficie, preparate con roccia compatta ed aventi spessore maggiore del percorso delle particelle α nelle lave, erano tali da potersi considerare come sorgenti spesse. Dettagli della tecnica usata per la preparazione delle sezioni sottili, per l'esposizione di queste alle emulsioni nucleari, per imprimere sulle emulsioni l'immagine della sezione sottile, per l'osservazione al microscopio e per la correzione delle particelle α provenienti dalle lastre, sono stati descritti in una precedente nota (⁴).

Siccome le lave esaminate presentano una grana piuttosto piccola, la misura dell'attività radioattiva fatta coi metodi delle sezioni sottili e delle rocce polverizzate e compresse sono confrontabili: ciò è confermato dall'egualanza — entro gli errori statistici — dei valori dell'attività radioattiva della lava Cava Daniele determinati coi due metodi e riportati nelle tab. I e II.

Abbiamo determinato l'attività radioattiva per alcune lave preistoriche (S. Sofia, Lärmissi, Trifoglietto) ed alcune lave storiche (122 a.C., 252 d.C., 1669, 1950) per indagare sulla variazione della radioattività delle lave etnee in funzione dell'età della colata. In tabella 2, col. I sono indicate le lave esaminate, in col. 2 le età delle colate, ed in col. 3 l'attività radioattiva espressa dal numero di particelle α più lunghe di 3μ in emulsione, emesse per cm^2 e per secondo dalla sezione sottile. Dai dati di col. 3 si deduce che l'attività

radioattiva delle lave etnee appartenenti a colate diverse varia poco, al massimo di un fattore $1,75 \pm 0,03$. Dato che — come si è visto nel paragrafo precedente — l'attività radioattiva in seno ad una stessa colata può variare di un fattore 1,5, si può concludere che per le lave etnee di colate differenti si ha una variazione dell'attività radioattiva dello stesso ordine di grandezza di quella che si può riscontrare in seno ad una stessa colata.

Fra le lave storiche si nota una leggera diminuzione della radioattività per le colate più recenti, ma tale diminuzione — di un fattore 1,44 — è minore della variazione che si può riscontrare in seno ad una stessa colata.

TABELLA II. — Attività radioattiva delle lave di diverse colate e delle masse fondamentali delle stesse lave.

Lave esaminate	Età delle colate	Attività radioattiva delle lave $\alpha \geq 3 \mu \cdot 10^4$ cm ² s	Attività radioattiva delle masse fondamentali $\alpha \geq 3 \mu \cdot 10^4$ cm ² s	$r = \frac{\text{Att. rad. mas. fond.}}{\text{Att. radioatt. lava}}$
Fornazzo . . .	1950	$5,25 \pm 0,05$	$11,85 \pm 0,13$	$2,28 \pm 0,03$
Cava Daniele	1669	$5,76 \pm 0,09$	$12,21 \pm 0,21$	$2,12 \pm 0,07$
Catania . . .	252 d.C.	$7,56 \pm 0,06$	$13,15 \pm 0,14$	$1,74 \pm 0,02$
Carvana . . .	122 a.C.	$7,56 \pm 0,06$	$13,40 \pm 0,13$	$1,75 \pm 0,02$
Trifoglietto . .	preistorica	$7,05 \pm 0,07$	$13,51 \pm 0,16$	$1,92 \pm 0,03$
Larmisi . . .	"	$6,56 \pm 0,06$	$14,51 \pm 0,16$	$2,21 \pm 0,03$
S. Sofia . . .	esostorica	$4,31 \pm 0,05$	$9,60 \pm 0,12$	$2,23 \pm 0,04$

4. — Discussione sulla radioattività delle lave etnee e vesuviane.

Mentre, come si è visto nel paragrafo precedente, la radioattività delle lave etnee resta presso che costante nelle varie colate, la radioattività delle lave vesuviane è maggiore per le lave più recenti. Misure sulla radioattività delle lave del Vesuvio sono state fatte da JOLY (⁷) per numerose colate e da BACHELET, FERRETTI SFORZINI ed IPPOLITO (⁸) per le colate del 79 e del 1899. Questi ultimi, usando la tecnica delle emulsioni nucleari, trovano che la lava del 1899 è 6 volte più attiva di quella del 79.

Circa il manifestarsi di eterogeneità di qualunque natura nelle lave emesse da vulcani attivi, bisogna riconoscere l'influenza di altri fattori inerenti al particolare dinamismo di ciascun vulcano: fattori che possono agevolare od

(⁷) J. JOLY: *Phil. Mag.*, **18**, 577 (1909).

(⁸) F. BACHELET, M. FERRETTI SFORZINI e F. IPPOLITO: *Nuovo Cimento*, **8**, 851 (1951).

ostacolare i processi di omogeneizzazione del magma, prima della sua effusione alla superficie. Possono favorire l'omogeneità del magma le più grandi dimensioni del focolaio e del condotto di un vulcano quale l'Etna, colle conseguenti possibilità di rimescolamenti preruttivi del proprio magma. Può ostacolare l'omogeneità del magma la ristrettezza del condotto d'un vulcano quale il Vesuvio, dove non sono possibili grandi ammassamenti di magma e vasti movimenti convettivi in seno ad esso, mentre vengono intensificate le reazioni colle rocce costituenti le pareti del condotto.

Concludendo, la variazione dell'attività radioattiva delle lave in funzione del tempo, non avendo lo stesso andamento per l'Etna e per il Vesuvio, non può considerarsi come una caratteristica comune ai vari vulcani, ma come una caratteristica dipendente da particolari condizioni di struttura e di dinamismo, differenti da vulcano a vulcano.

5. - Identificazione delle zone radioattive mediante il metodo delle sezioni sottili.

Per cercare di identificare i minerali costituenti la lava ai quali si associano gli elementi radioattivi, abbiamo osservato al microscopio l'insieme emulsione fotografica-sezione sottile, dopo aver impresso sull'emulsione l'immagine della sezione sottile, nel modo descritto in una precedente nota (⁴).

Dalle osservazioni delle diverse sezioni sottili, relative alle varie colate già indicate in tab. II è risultato che:

a) Gli elementi radioattivi contenuti nelle lave si trovano sparsi nella massa fondamentale e mai nei fenocristalli; in alcune lave non completamente cristallizzate, i fenocristalli presentano inclusi brandelli di massa fondamentale e solo in corrispondenza di tali inclusi si ha emissione di particelle α .

b) La radioattività della massa fondamentale non si trova concentrata in specifici costituenti radioattivi, ma legata a fasi disperse, come in soluzione in seno alla massa fondamentale. Solo in alcune lave, che presentano una cristallizzazione più completa, si notano leggeri addensamenti di tracce α .

c) Si è cercato di determinare se nella massa fondamentale gli elementi radioattivi si associano in prevalenza a qualcuno dei minerali che la costituiscono, ma poiché la massa fondamentale è formata da un fittissimo intreccio di microcristalli, non è possibile individuare i componenti radioattivi mediante osservazioni ottiche al microscopio di mineralogia. Però, dato che non si osservano mai tracce in corrispondenza dei fenocristalli (labradorite, augite, olivina) si può supporre che questi stessi minerali, ridotti a microliti nella massa fondamentale, conservino la loro inattività.

6. - Misura dell'attività radioattiva della massa fondamentale delle lave.

Poichè gli elementi radioattivi contenuti nelle lave non si associano mai ai fenocristalli ma sempre alla massa fondamentale, e dato che non è possibile stabilire con osservazioni ottiche a quali componenti della massa fondamentale si associa la radioattività, abbiamo ritenuto opportuno misurare l'attività radioattiva della massa fondamentale per le stesse lave per le quali è stata misurata l'attività radioattiva totale. Tale misura è stata eseguita sulle stesse lastre usate per la determinazione dell'attività radioattiva delle lave.

La determinazione dell'attività radioattiva della massa fondamentale è stata eseguita osservando al microscopio l'insieme emulsione fotografica-sezione sottile con oculari $4,5\times$ e con obiettivo ad immagine Cooke $45\times$, con distanza frontale di 1,5 mm, dopo aver sovrapposto perfettamente l'immagine della sezione sottile impressa sull'emulsione fotografica, con la corrispondente sezione sottile. Il numero delle $(\alpha \geq 3 \mu)/(cm^2 \cdot s)$ è stato determinato esplorando per righe e prendendo in considerazione solo i tratti di riga occupati esclusivamente da massa fondamentale. L'area di ogni tratto esplorato è stata determinata moltiplicando il diametro del campo del microscopio per la lunghezza del tratto esplorato. Quest'ultima veniva misurata mediante due letture sulla scala delle x del tavolinetto traslatore del microscopio, che apprezza fino ad 1/10 di mm. Anche per questa misura è stata fatta la correzione per le α non provenienti dalle sezioni sottili, nel modo indicato in ⁽⁴⁾.

In col. 4 tab. II sono riportati i valori dell'attività radioattiva della massa fondamentale delle lave, ed in col. 5 i rapporti r fra l'attività radioattiva della massa fondamentale e l'attività radioattiva di tutta la lava, per le varie colate esaminate. Si vede che il rapporto r ha un valore di circa 2 per tutte le lave esaminate, con un valor medio 2,03.

Poichè, i fenocristalli non contengono elementi radioattivi, se la massa fondamentale presenta un'attività radioattiva doppia di quella di tutta la lava, questa sarà costituita all'incirca da parti eguali di massa fondamentale e di fenocristalli.

Dalla col. 4 tab. II si deduce che la variazione massima fra l'attività radioattiva della massa fondamentale delle varie lave è di $1,51 \pm 0,04$ (colate Lar-misi e S. Sofia). Confrontando questo valore con $1,75 \pm 0,03$ relativo alla variazione massima dell'attività totale delle lave di varie colate, si deduce che i valori dell'attività della massa fondamentale variano meno di quelli dell'attività della lava, cioè la variazione dell'attività radioattiva fra colate diverse è minore per le misure fatte sulla massa fondamentale.

Dalla col. 4 tab. II si vede che per le lave storiche anche i valori dell'attività radioattiva della massa fondamentale diminuiscono leggermente per le colate più recenti. Tale variazione però è molto piccola, di circa $0,7 \cdot 10^{-4}$

$(\alpha \geq 3 \mu)/(cm^2 \cdot s)$ fra lave emesse a 1 000 anni di distanza. Questa piccola diminuzione dell'attività radioattiva per le lave più recenti, che si nota pure per i valori di col. 3, potrebbe attribuirsi al non raggiunto equilibrio radioattivo delle lave, come è stato mostrato in⁽⁹⁾.

7. - Tentativi di identificazione dei componenti radioattivi della massa fondamentale.

Non avendo potuto determinare con le osservazioni fatte sull'insieme emulsione fotografica-sezione sottile, a quali componenti mineralogici della massa fondamentale si associano gli elementi radioattivi, abbiamo tentato tale identificazione per altre vie.

Esaminando le analisi chimiche delle lave dell'Etna riportate dal WASHINGTON⁽¹⁰⁾, si vede che in tutte è presente l'ossido di titanio in percentuali che variano da 1 a 2,45 %. Poichè il prctattinio si associa al titanio⁽¹¹⁾ e questo nelle lave etnee si associa in prevalenza alla magnetite (nella proporzione media del 10 % di TiO_2) per provare la presenza di elementi radioattivi, abbiamo fatto dei saggi su sezioni sottili di magnetite dei Monti Rossi (1669) (tale magnetite è stata raccolta fra le sabbie del cono eruttivo dei Monti Rossi, dove si trova spesso in cristalli liberi). Ma dall'esame dell'emulsione fotografica, alla quale è stata esposta la sezione sottile di magnetite, è risultato che gli elementi radioattivi non si associano alla magnetite e quindi neanche al titanio in essa contenuto. D'altra parte anche rivedendo le analisi chimiche e l'attività radioattiva di lave appartenenti ad altre regioni vulcaniche, si nota che non vi è proporzionalità diretta fra contenuto di titano e radioattività. Così le lave del Vesuvio contengono l'ossido di titanio in quantità minore di quelle dell'Etna (e precisamente da 0,17 a 1,41 %)⁽¹⁰⁾ mentre la loro radioattività è superiore a quella delle lave etnee⁽⁷⁾⁽⁸⁾.

Degli altri minerali costituenti le lave etnee coi quali si potrebbe imparirentare gli elementi radioattivi, vi è l'apatite alla quale in qualche giacimento si associano elementi lantanidici e per conseguenza il ^{144}Ce ⁽¹²⁾. La presenza dell'apatite è confermata sia dall'esame al microscopio che dal contenuto in P_2O_5 rivelato sempre nelle analisi chimiche delle lave etnee. Dall'esame delle

⁽⁹⁾ S. MILONE TAMBURINO e A. STELLA: *Boll. Acc. Gioenia*, sez. 4, vol. 2, fasc. I (1952).

⁽¹⁰⁾ A. S. WASHINGTON: *Chemical Analyses of igneous rocks* (Washington, 1917).

⁽¹¹⁾ I. JOLIOT-CURIE: *Les radioéléments naturels* (Paris, 1946), p. 45.

⁽¹²⁾ O. RANKAMA e SAHAMA: *Geochemistry* (Chicago, 1950), p. 520.

analisi di lave dell'Etna e del Vesuvio (10) risulta che P_2O_5 varia da 0,03 a 0,65% con una media di 0,328% per le lave etnee e da 0,12 a 1,42% con una media di 0,751% per le lave vesuviane. Siccome le lave del Vesuvio sono più radioattive di quelle dell'Etna, non è da escludere l'ipotesi che gli elementi radioattivi nelle lave si associno all'apatite. Anche per le lave delle isole Hawai si nota una proporzionalità fra contenuto in P_2O_5 e radioattività: esse sono meno radioattive di quelle etnee (7) e contengono una più bassa percentuale di P_2O_5 (10).

Per accertare se nelle lave dell'Etna la radioattività si associa all'apatite, è stato ricavato da un campione di lava un residuo arricchito di P_2O_5 . Abbiamo scelto un campione di lava della S. Iara Biscari (1669), della quale è stata fatta un'analisi chimica (6).

Tale lava è stata dapprima trattata con HNO_3 diluito a caldo; la soluzione è stata portata a secco, successivamente svaporata con HF e H_2SO_4 ed il residuo secco mescolato con CaO (circa 1/5 rispetto al peso del campione di lava usato) è stato calcinato brevemente a temperatura moderata. Col metodo delle rocce polverizzate e compresse (4) è stata misurata l'attività radioattiva di tale residuo e quella della lava dalla quale il residuo è stato ricavato. Si è trovata un'attività di $(7,69 \pm 0,19) \cdot 10^{-4}$ ($\alpha \geq 3 \mu$)/(cm²·s) per la lava integrale, e di $(13,51 \pm 0,37) \cdot 10^{-4}$ ($\alpha \geq 3 \mu$)/(cm² s) per il residuo apatitico: dato che l'attività del residuo è 1,758 volte quella della lava dalla quale è stato ricavato, si può supporre che almeno una parte degli elementi radioattivi contenuti nelle lave si associa all'apatite.

È stata poi misurata l'attività radioattiva di un altro residuo, sempre della stessa lava 1669 S. Iara Biscari, ottenuto disgregando 7 grammi di lava (grossolanamente tritata) con HF in presenza di H_2SO_4 .

Il residuo insolubile è stato lavato per decantazione con acqua distillata e infine portato a secco. Tale residuo è composto principalmente da fluoruri di calcio e di magnesio e da eventuali elementi insolubili della roccia, ed il suo peso è di circa 1,1 g. L'attività radioattiva di quest'ultimo residuo, misurata col metodo delle rocce polverizzate e compresse, è risultata di $(7,66 \pm 0,21) \cdot 10^{-4}$ ($\alpha \geq 3 \mu$)/(cm²·s). Tale valore è uguale, entro gli errori statistici, al valore $(7,69 \pm 0,19) \cdot 10^{-4}$ trovato precedentemente per la lava dal quale il residuo è stato ricavato. Questo indica che la lava, dalla quale è stato ricavato tale residuo, non contiene minerali radioattivi resistenti all'azione dell'acido fluoridrico diluito.

Ringraziamo il Prof. F. STELLA STARABBA, Direttore dell'Istituto di Mineralogia, per i numerosi consigli datici, il Prof. C. BELLIA, Direttore dell'Istituto di Fisica, per averci messo a disposizione i fondi per eseguire la misura ed il Dott. C. MILONE per gli utili consigli.

SUMMARY (*)

Using nuclear emulsions and the techniques of thin sections and of layers of powdered and pressed rocks the radioactivity of several Etnean lavas has been investigated. It has been found that the radioactivity changes by a factor 1.5 for lavas emitted in various phases of the same stream and by a factor 1.75 for lavas of different streams, also if they took place thousands of years apart. One concludes therefore that the radioactivity of Etnean lavas does substantially not depend on the age of the stream. It has been found, further, that the radioactive elements are detected in the fundamental mass and are never included in the phenocrystals. The radioactivity of the fundamental mass of the various streams has been measured and a maximum change by a factor 1.51 has been found between lavas of different streams. The average value of the radioactivity of the fundamental mass is twice the average value of the radioactivity of the corresponding lava. It has been tried to identify to which constituents of the fundamental mass the radioactivity pertains and it seems that at least part of the radioactive elements are associated with apatite.

(*) *Editor's translation.*

New Barometric and Temperature Coefficients for the Frequency of Small Cosmic-Ray Bursts. (*)

J. W. BROXON

Department of Physics, University of Colorado, Boulder, Colo. (U.S.A.)

(ricevuto il 29 Agosto 1952)

Summary. — This is a continuation of an earlier paper (1). Records for three of the nineteen months of the cosmic-ray observations primarily considered there have been reprocessed without satisfactory improvement of results. The statistical treatment of data for an earlier series of observations during eighteen months in 1938-9 has been completed with very satisfactory results. For a class of cosmic-ray bursts consisting of about 75 to 95 particles in a very heavily shielded high-pressure chamber at an altitude of 5440 feet, the barometric and atmospheric temperature coefficients have been found to be: -4.58%/mm Hg and $-2.53\text{%/^{\circ}C}$, based on daily average values; and -9.05%/mm Hg and $-2.19\text{%/^{\circ}C}$, based on monthly average values. With regard to coefficients based on daily average values, the ratio of the barometric coefficient of the radiation producing the small bursts to that of the radiation producing the burst-corrected ionization is about 26, while the corresponding ratio of the temperature coefficients is about 45. Discussion is included regarding the nature of the burst-producing radiation characterized by such large barometric and temperature coefficients.

1. — Introduction.

This is essentially a continuation of a recent paper (1). In this were presented a description of the apparatus, details of the experimental procedure, a discussion of the reading of the records, and details of the statistical procedure, as well as certain results and a discussion of them. Partial regression

(*) Presented at the Denver meeting of the American Physical Society, June 30-July 3, 1952.

(¹) J. W. BROXON: *Phys. Rev.*, **81**, 555 (1951).

and correlation coefficients relative to barometric pressure and (surface) atmospheric temperature were evaluated both for the radiation producing the 1 mm bursts and for that producing the burst-corrected cosmic-ray (CR) ionization in a heavily shielded, high-pressure, ion chamber at Boulder for 19 months in 1947-8-9. The 1 mm bursts of that series comprised a class corresponding to $(1.2 \text{ to } 1.9) \times 10^6$ ion pairs, estimated to represent the passage of 31 to 50 particles through the chamber, or an average flux density of 0.045 to 0.072 particles/cm². A preliminary treatment providing simple barometric coefficients corresponding to another class of 1 mm bursts for an earlier series of observations (with the same apparatus and location but with air at 160 atmospheres instead of argon at 20.2 atmospheres) extending over 18 months in 1938-9 was also included. The 1 mm bursts of this series consisted of $(2.9 \text{ to } 3.6) \times 10^6$ ion pairs. Thus the average size of the 1 mm bursts of the 1938-9 series was just about twice the average size of the 1 mm bursts of the 1947-8-9 series, but the range of size of the class of bursts was the same for the two series. The 1 mm bursts of the 1938-9 series are the identical ones for which 27-day recurrences were found (²) some time ago by Chree analysis. Their relation to sunspots and certain other variables was also presented in an earlier paper (³).

In view of the disparity of the observations by the four different readers of the photographic records of the 1947-8-9 series (see fig. 1 and Table II of ref. (¹)) records for three of the months which displayed poor correlation have been read again by a fifth reader with somewhat improved conditions. Also, the least-squares analysis for the 1 mm bursts of the 1938-9 series has been completed. Surprisingly, the coefficients based on the earlier observations have been found to be much more reliable and startlingly large.

2. - Coefficients for Three Months of the 1947-8-9 Series.

Reader No. 5 was Charles E. HORNBACK, a senior student in Engineering Physics. He had time to read the records for only three months. Because of low correlation coefficients already associated with them and to provide comparison with three of the four earlier (¹) readers, the months selected for re-reading were Dec., 1947, Aug., 1948, and May, 1949. In an attempt to improve the accuracy of reading, new transparent scales were made with 0.5 mm divisions as well as the 1 mm divisions used earlier, and perhaps with even finer lines. Also, the simple, large reading glasses with focal lengths of 22 cm and 25 cm used earlier for reading records of this series, were replaced by a compound lens with principal focus about 4 cm from its central plane. This latter lens

(²). J. W. BROXON: *Phys. Rev.*, **70**, 494 (1946).

(³). J. W. BROXON: *Phys. Rev.*, **72**, 1187 (1947).

provided a magnification approximately equal to that employed in reading the bursts of the 1938-9 series.

TABLE I. — Partial regression (b) and correlation (r) coefficients and significance ratios (t) for frequency of 1 mm bursts with respect to barometric pressure ($_{12\cdot 3}$) and outdoor temperature ($_{13\cdot 2}$) for three months in 1947-8-9.

Month	No. of Days	Reader	$b_{12\cdot 3}$ (%/mm)	$r_{12\cdot 3}$	$t_{12\cdot 3}$	$b_{13\cdot 2}$ (%/°C)	$r_{13\cdot 2}$	$t_{13\cdot 2}$
Dec., 1947	30	2	-0.43	-0.103	-0.55	-0.34	-0.100	-0.53
	30	4	-0.20	-0.077	-0.41	-1.13	-0.450	-2.38
	30	5	-0.90	-0.262	-1.38	-1.29	-0.429	-2.27
	25	2	-0.16	-0.044	-0.21	0.51	0.138	0.66
	25	4	-0.51	-0.262	-1.26	-1.12	-0.508	-2.44
	25	5	-1.25	-0.449	-2.15	-1.88	-0.600	-2.88
Aug., 1948	31	1	1.01	0.120	0.64	-2.93	-0.457	-2.46
	31	5	+0.13	-0.015	-0.08	2.36	0.355	1.91
May, 1949	31	4	-0.39	-0.079	-0.42	1.49	0.355	1.91
	31	5	-3.38	-0.803	-4.32	-1.34	-0.559	-3.01

In Table I are given the barometric and temperature coefficients corresponding to the 1 mm bursts, as well as the corresponding correlation coefficients and significance ratios for these three months. Values obtained from the earlier readings as well as the new ones are included for comparison. Reader 5 noted that records for the latter part of Dec., 1947, after installation of a new lamp, were not quite as distinct as were the first 25 of the daily records. Consequently, the table includes the results of computations based upon the first 25 as well as upon all 30 of the daily records available for this month, for each of the three readers who read them.

Reader 5 provided much improved barometric correlation for Dec., 1947, particularly with use of only the 25 clearest records. For these, his barometric significance ratio (t -value) is nearly at the 3% level, while that for the temperature is well above the 1% level. Use of the 25 daily records instead of all 30 for this month is seen also to improve the correlations obtained by reader 4, but not those by reader 2. It is noticeable here as elsewhere in the tables of this and the preceding paper (1), that the largest t -values are often associated with the numerically largest negative regression coefficients. Reader 5 provided even more extreme variation in the actual number of bursts of the 1 mm class discerned by the different readers, than is indicated by fig. 1 of ref. (1). For the 25 days with clearest records in this month, the total numbers

of bursts in the 1 mm class read by readers 2, 4, and 5, were 4 718, 7 396, and 17 500, respectively.

The differences between the results provided by readers 1 and 5 for Aug., 1948, are striking and seem difficult to interpret. Reader 1 provided a positive barometric coefficient with low t -value, and a negative temperature coefficient with t -value well above the 2% level. Reader 5 provided a negative barometric coefficient with very low t -value, and a positive temperature coefficient at a little above the 6% level. While reader 5 had improved conditions for reading the bursts, reader 1 was by far the most experienced of the readers. For this month, reader 1 read a total of 6 509 bursts of the 1 mm class, while reader 5 read 14 440.

For May, 1949, the t -values provided by reader 5 are both excellent, well above the 1% level, and represent quite large negative barometric and temperature coefficients. The difference between the total numbers of 1 mm bursts read by readers 4 and 5 for this month was relatively small, these being 8 604 and 9 948, respectively.

It was hoped that having some of the records re-read by a new reader might indicate rather clearly which of the earlier readers provided the more reliable data. This does not appear to have been accomplished, but rather, the differences among readers have been accentuated. In view of this, it is concluded that coefficients based on the entire period and utilizing in a single computation, the 1 mm burst data provided by the several readers (as in Table III of ref. 1) are worth very little. For purposes of comparison with the other series, however, new averages of the monthly values of the barometric and temperature coefficients for the 1947-8-9 series have been computed and are listed in the lower part of Table III of the present paper. As explained there, values based on data provided by reader 5 for Dec., 1947, and May, 1949, were substituted for those used in ref. 1, for determining these new averages.

Coefficients for the CR ionization (after correction for bursts) based on the data supplied by reader 5 are not tabulated herein. As illustrated in Table IV of ref. 1, the agreement among the several readers with respect to this aspect of the investigation was generally satisfactory. This situation is not altered materially by the data of reader 5. The most noticeable features of the CR ionization values provided by reader 5 were a small positive temperature coefficient with low t value for Dec., 1947, and a considerably larger negative temperature correlation, with t value at about the 4% level, for Aug., 1948. It is apparent that the barometric and temperature coefficients for the radiation producing the burst-corrected CR ionization, both those based on the daily averages for all 581 days and those based on the monthly averages for the 19 months of the 1947-8-9 series, are quite reliable.

3. - Coefficients for 1 mm Bursts of the 1938-9 Series.

Because all of the data for the 1938-9 series were provided by two readers (V. A. LONG and R. M. WHALEY), it was thought that it might be profitable to complete the least-squares analysis for this series. This has been done. The results for individual months are tabulated in Table II. The records for the first 12 months of this series were all read by reader A who was also reader 1 of the 1947-8-9 series.

In Table II, the first row for each month was obtained by utilization of the data for all the days of that month for which data were available, the number of days with data being designated in column 2. For most of the months a second row, and for a few months a third, have been included. These were obtained by omitting the data for 1, 2, or 3, and in one case, 4 days, the number of days retained being shown in column 2 in each case. This was done, in part, to illustrate the extent to which the coefficients obtained for a particular month may depend upon the data for a very few days. In every instance except one, no value corresponding to a deletion has been tabulated unless the deletion resulted in an increase of the *t*-value, either for the barometric effect or for the temperature effect. In some instances the deletion resulted in an increase of both the *t*-values. In others, an increase in one of the *t*-values occurred at the expense of a decrease of the other. The writer is not aware of any systematic procedure for obtaining an increase in the significance ratios by deletions of data for particular days. Deletions were attempted only in instances where a casual inspection of the data indicated that improved significance ratios might result from the deletion of data for one or a very few days. One striking example of the improvement of a barometric coefficient by this procedure deserves special mention. In an earlier paper (³) it was pointed out that for April, 1939, a much improved *simple* correlation with the barometric pressure was obtained if the frequency of the 1 mm bursts for each day were associated with the mean barometric pressure for the *preceding* day rather than for the current day. Omission of the data for one day (April 6), however, resulted in very nearly as large a simple negative correlation with the current barometric pressure as with that of the preceding day. As shown in Table II, however, the increase in the *partial* correlation coefficient with respect to pressure, though considerable, was not nearly so striking, and the correlation with respect to temperature was very considerably decreased by the omission. The improvement resulting from omission of data for the last day of January, 1939, was mentioned in the earlier paper (³).

Table II shows that both the barometric and the temperature coefficients for the frequency of the 1 mm bursts for the individual months of the 1938-9 series are predominantly negative as in the 1947-8-9 series. For both series

TABLE II. — Partial regression (b) and correlation (r) coefficients and significance ratios (t) for frequency of 1 mm bursts with respect to barometric pressure ($_{12 \cdot 3}$) and outdoor temperature ($_{13 \cdot 2}$) for 18 months in 1938-9.

Mouth	No. of Days	Reader	$b_{12 \cdot 3}$ (%/mm)	$r_{12 \cdot 3}$	$t_{12 \cdot 3}$	$b_{13 \cdot 2}$ (%/ $^{\circ}\text{C}$)	$r_{13 \cdot 2}$	$t_{13 \cdot 2}$
	—	—	—	—	—	—	—	—
(1938)								
June	30	A	— 3.71	— 0.280	— 1.48	— 1.46	— 0.129	— 0.68
	28	A	— 3.33	— 0.350	— 1.78	— 2.16	— 0.265	— 1.35
July	28	A	0.16	0.014	0.07	3.98	0.385	1.96
	26	A	— 1.25	— 0.128	— 0.63	2.26	0.253	1.24
August	28	A	1.69	0.112	0.57	— 1.09	— 0.088	— 0.45
	24	A	— 2.43	— 0.303	— 1.42	— 4.22	— 0.514	— 2.41
September	26	A	0.10	0.011	0.05	1.62	0.251	1.23
	23	A	— 1.48	— 0.172	— 0.79	0.74	0.122	0.56
October	31	A	— 4.43	— 0.544	— 2.93	— 1.75	— 0.385	— 2.07
November	30	A	— 2.22	— 0.504	— 2.67	— 1.90	— 0.452	— 2.39
	28	A	— 2.86	— 0.580	— 2.96	— 1.98	— 0.475	— 2.42
December	31	A	— 1.13	— 0.193	— 1.04	0.15	0.058	0.31
	29	A	— 1.59	— 0.302	— 1.57	— 0.09	— 0.039	— 0.20
	28	A	— 0.03	— 0.007	— 0.04	— 0.90	— 0.350	— 1.78
(1939)								
January	31	A	— 2.24	— 0.427	— 2.30	1.04	0.208	1.12
	30	A	— 3.92	— 0.731	— 3.87	0.54	0.156	0.83
	28	A	— 3.41	— 0.657	— 3.35	0.12	0.035	0.18
February	27	A	— 2.46	— 0.612	— 3.06	— 1.05	— 0.349	— 1.75
	26	A	— 2.41	— 0.606	— 2.97	— 1.17	— 0.383	— 1.87
March	31	A	— 3.44	— 0.592	— 3.19	— 0.53	— 0.180	— 0.97
	29	A	— 3.76	— 0.619	— 3.22	— 0.83	— 0.272	— 1.41
	28	A	— 3.64	— 0.627	— 3.20	— 1.15	— 0.370	— 1.89
April	30	A	— 2.82	— 0.408	— 2.16	— 2.02	— 0.475	— 2.51
	29	A	— 3.43	— 0.492	— 2.56	— 1.37	— 0.333	— 1.73
May	29	A	— 4.00	— 0.470	— 2.44	— 0.77	— 0.132	— 0.69
	27	A	— 2.67	— 0.440	— 2.20	— 1.34	— 0.309	— 1.55
June	30	B	— 4.64	— 0.456	— 2.41	— 5.32	— 0.444	— 2.35
	28	B	— 5.08	— 0.573	— 2.92	— 4.86	— 0.489	— 2.49
July	31	B	— 2.03	— 0.243	— 1.31	0.92	0.088	0.47
	28	B	— 1.31	— 0.175	— 0.89	— 0.96	— 0.100	— 0.51
August	30	B	— 2.88	— 0.285	— 1.51	— 6.39	— 0.503	— 2.66
	28	B	— 3.37	— 0.367	— 1.87	— 5.58	— 0.496	— 2.53
	28	B	— 3.53	— 0.381	— 1.94	— 4.97	— 0.438	— 2.23
September	30	B	2.13	0.320	1.69	2.62	0.351	1.85
October	31	B	— 1.37	— 0.280	— 1.51	0.79	0.149	0.80
	29	B	— 2.00	— 0.458	— 2.38	0.37	0.083	0.43
	28	B	— 1.30	— 0.289	— 1.47	— 0.42	— 0.076	— 0.39
November	30	B	— 3.38	— 0.346	— 1.83	1.59	0.259	1.37
	27	B	— 3.55	— 0.488	— 2.44	— 2.53	— 0.385	— 1.93

there is considerable variation among monthly values, but the extremes of variation and the averages are comparable in the two cases. In neither series does there appear to be any clear indication of a regular seasonal variation of the coefficients determined for individual months. The lower part of Table III lists for comparison several corresponding values obtained from the two series: the averages of all monthly values of the barometric coefficients and of the temperature coefficients; the averages of the values of these with significance ratios above the 2% level; and the largest individual monthly values. There seems to be no very clear indication that the difference between the actual magnitudes of the 1 mm bursts of the two series is sufficient to produce a considerable difference between the corresponding barometric or temperature coefficients. Because of the greater magnitudes of the 1 mm bursts of the 1938-9 series, their frequency is very much less. On the average, there were only about 1100 1 mm bursts per month for the 1938-9 series, which is seen to be far less than the values cited under section II for three months for the 1947-8-9 series. Consequently, from the point of view of numbers of events, the 1947-8-9 series should have provided far greater statistical reliability, but this seems to have been offset by the unexpected difficulty in obtaining reliable readings for the later series. Some evidence for the statistical advantage of the greater numbers is perhaps provided by the somewhat smaller number of monthly coefficients of the 1938-9 series with t -values above the 2% level, particularly of those values obtained without omissions.

The first three lines of Table III illustrate the very great advantage of having all records read by a single reader or, as in the present instance, two readers who appear to have been able to form closely corresponding judgments. As shown by the first line in the table, the use of the 1 mm burst data for all the 534 days with data in the 18 months of the 1938-9 series provided sufficiently large numbers to produce large correlation coefficients and extremely large significance ratios, both for the barometric coefficient and for the temperature coefficient of the radiation which produces the small bursts. In fact, these t -values are comparable to those which characterize the barometric and temperature coefficients of the radiation which produces the burst-corrected ionization, based on data for 581 days, as shown in Table IV of ref. 1. This is a far different situation from that shown in Table III of reference 1. It now seems quite apparent that the relatively small barometric coefficients and the positive temperature coefficients displayed there may be attributed to the incompatibility of the data provided by the four different readers of the 1947-8-9 series. The second line of Table III of the present paper displays even larger correlation coefficients and significance ratios than does the first. These values were obtained by omitting the data for a few days of several of the months. The omissions (if any) made from any particular month were those which yielded the highest t -value for the barometric effect for that

TABLE III. - Partial regression and correlation coefficients for the 1 mm bursts of the 1938-9 series as in Table II, but based on daily averages or monthly averages for the entire 18 months. Below are noted comparisons of monthly values for the two series.

	$b_{12 \cdot 3}$ (%/mm)	$r_{12 \cdot 3}$	$t_{12 \cdot 3}$	$b_{13 \cdot 2}$ (%/ $^{\circ}$ C)	$r_{13 \cdot 2}$	$t_{13 \cdot 2}$
Based on all 534 daily values	- 4.40	- 0.497	- 11.47	- 2.45	- 0.596	- 13.75
Based on 506 daily values	- 4.76	- 0.558	- 12.53	- 2.61	- 0.653	- 14.66
Based on the 18 monthly averages . . .	- 9.05	- 0.725	- 2.90	- 2.19	- 0.716	- 2.86

In the following comparison, values by the reader indicated in Table II of ref. (1) were employed for the 1947-8-9 series of 1 mm burst observations, except that values by reader 5 were substituted for Dec., 1947, and May, 1949. Where more than one value above the 2% level was recorded for a single month of either series, the one with the largest *t*-value was used. Values obtained from all days with data were employed in computing averages of the 18 monthly values of the 1938-9 series.

Average of 19 monthly values of $b_{12 \cdot 3}$ for the 1 mm bursts of the 1947-8-9 series	-	-	-	1.75%/ $^{\circ}$ mm	-	-
18))	18))))))	1938-9))))	= - 2.04%/ $^{\circ}$ mm
Average of 11 monthly values of $b_{12 \cdot 3}$ with $t_{12 \cdot 3}$ above 2% above the 2% level in 1947-8-9 series	-	-	-	2.52%/ $^{\circ}$ mm	-	-
10))	10))))))	1938-9))))	= - 3.55%/ $^{\circ}$ mm
Largest single monthly value of $b_{12 \cdot 3}$ in 1947-8-9 series (July, 1948)	-	-	-	5.79%/ $^{\circ}$ mm	-	-
18))	18))))))	1938-9))	(June, 1938)	= - 5.08%/ $^{\circ}$ mm
Average of 19 monthly values of $b_{13 \cdot 2}$ for the 1 mm bursts of the 1947-8-9 series	-	-	-	1.17%/ $^{\circ}$ C	-	-
18))	18))))))	1938-9))))	= - 0.53%/ $^{\circ}$ C
Average of 8 monthly values of $b_{13 \cdot 2}$ with $t_{13 \cdot 2}$ above 2% above the 2% level in 1947-8-9 series	-	-	-	1.72%/ $^{\circ}$ C	-	-
5))	5))))))	1938-9))))	= - 3.89%/ $^{\circ}$ C
Largest single monthly value of $b_{13 \cdot 2}$ in 1947-8-9 series (July, 1948)	-	-	-	4.37%/ $^{\circ}$ C	-	-
)))))	1938-9))	(Aug, 1939)	= - 6.39%/ $^{\circ}$ C

month ($t_{12,3}$) as listed in Table II. Because these omissions were made quite arbitrarily, they might be regarded as improper. The writer, however, is impressed by the fact that the correlation coefficients and also the significance ratios both for the barometric effect and for the temperature effect, are all increased thereby. It is suggested, therefore, that perhaps the most reliable barometric and temperature coefficients available are those obtained from averaging the values listed in lines 1 and 2 of Table III. These values with their probable errors are $-4.40 \pm 0.22\%/\text{mm Hg}$ and $-4.76 \pm 0.21\%/\text{mm Hg}$ for the barometric coefficient, and $-2.45 \pm 0.10\%/\text{°C}$ and $-2.61 \pm 0.09\%/\text{°C}$ for the temperature coefficient. The averages of these values are $-4.58\%/\text{mm}$ for the barometric coefficient, and $-2.53\%/\text{°C}$ for the temperature coefficient of the radiation producing the small bursts, based on daily average values. The writer has a good deal of confidence in these values, comparable to that in the values (Table IV of ref. 1): $-0.174\%/\text{mm}$ for the barometric coefficient, and $-0.056\%/\text{°C}$ for the temperature coefficient, of the radiation producing the burst-corrected ionization, also based on daily average values.

The third line of Table III shows values obtained by using monthly averages. The striking facts displayed here are that the barometric coefficient ($-9.05 \pm 1.37\%/\text{mm Hg}$) based on monthly average values, is approximately twice as great as that based on daily average values, and that the temperature coefficient ($-2.19 \pm 0.34\%/\text{°C}$) based on monthly average values, is nearly equal to that based on daily average values. Because there were only 18 months, the t -values listed in line 3 are considerably lower than those in the first two lines, but it is remarkable that the correlation coefficients obtained with monthly averages are so high and that the significance ratios are both well above the 1% level, actually above the 0.5% level. The barometric and temperature correlations for the radiation producing the small bursts, obtained with monthly averages, are seen to be considerably superior to those correspondingly obtained for the radiation producing the burst-corrected ionization, listed near the center of column 2 of page 562 of reference 1.

4. - Comparison of Coefficients for Burst-Producing Radiation and for Radiation Producing Burst-Corrected Ionization.

It would seem that we are now justified in concluding with even more confidence than before, that the radiation producing the small bursts (representing about 75 to 95 particles in the 1938-9 series) at Boulder (altitude 5440 ft.) has a very much larger barometric coefficient and also a very much larger (surface) temperature coefficient than does the radiation producing the burst-corrected ionization. If we restrict ourselves to the coefficients based on daily average values, apparently the most reliably established, we have for the

ratio of the barometric coefficients, $-4.58/-0.174 \cong 26$, and for the ratio of the temperature coefficients, $-2.53/-0.056 \cong 45$. (Appendix I of reference 1 gives details of the apparatus and shielding employed in these measurements).

While we are unaware of the measurement of the temperature effect for the burst-producing radiation by any other experimenter, several have determined (simple) barometric coefficients for this radiation. The ratio of the barometric coefficients evaluated immediately above is in remarkable agreement with the corresponding ratio, $(-5\%/\text{mm})/(-0.2\%/\text{mm}) = 25$, found some time ago by STEINKE, GASTELL and NIE⁽⁴⁾, presumably near sea level, with apparatus shielded by 10 cm Pb (and also with an earlier preliminary determination by the writer⁽³⁾). They did not observe a barometric effect with large bursts, but only with small ones.

HOGG⁽⁵⁾ obtained $b_{12,3} = -0.275\%/\text{mm Hg}$ for the mean barometric coefficient of the radiation producing the burst-corrected ionization during five years of observation, and $b_{12} = -3.25\%/\text{mm Hg}$ for the radiation producing bursts greater than 25 particles during one year of observation, with 10 cm Pb shields at an altitude of 2600 ft. at Canberra, Australia. The ratio of these is about 12. In agreement with STEINKE⁽⁴⁾ *et al.*, he found that the barometric effect decreased with increase of burst size, becoming negligible for bursts representing more than 150 particles (rays). By means of considerations of frequency distribution, HOGG has provided further evidence «that the smaller bursts arise from an easily absorbable radiation of low intensity», but that this is not true of the larger bursts.

Somewhat in disagreement with the observations of STEINKE⁽⁴⁾ *et al.* and of HOGG⁽⁵⁾ at lower altitudes, STINCHCOMB⁽⁶⁾ has recently obtained (after applying certain corrections) a (simple) barometric coefficient of $-2.3 \pm \pm 0.5\%/\text{mm Hg}$ for the radiation producing bursts of more than 200 particles with 10.7 cm Pb (and 1.5 cm steel) shields during five months at an altitude of 11 500 ft. at Climax (about 75 miles from Boulder). His data indicate the persistence of the barometric effect to burst magnitudes of more than 1 000 particles.

MONTGOMERY and MONTGOMERY⁽⁷⁾ obtained $b_{12} = -7.1 \pm 2.3\%/\text{mm Hg}$ corresponding to bursts of more than 76 particles with 4 cm Pb shields at an altitude of 14 100 ft. on Pike's Peak (about 100 miles from Boulder). They found the effect to be reduced to only $-0.5\%/\text{mm}$ near sea level, however.

⁽⁴⁾ E. G. STEINKE, A. GASTELL and H. NIE: *Naturwiss.*, **21**, 898 (1933).

⁽⁵⁾ A. R. HOGG: Memoir No. 10 (No. 5 of Vol. II) *Memoirs of the Commonwealth Observatory*.

⁽⁶⁾ T. G. STINCHCOMB: *Phys. Rev.*, **83**, 422 (1951).

⁽⁷⁾ C. G. MONTGOMERY and D. D. MONTGOMERY: *Phys. Rev.*, **47**, 429 (1935).

It may be recalled that the apparently reliable temperature coefficients for the radiation producing the burst-corrected ionization, cited by the writer in reference 1, were in certain respects in disagreement with the conclusions by DUPERIER⁽⁸⁾ based on an explanation of the (surface) temperature effect in terms of unstable mesons originating chiefly at a mean height of 16 km. (The barometric effect in the burst-corrected ionization has been similarly explained⁽⁹⁾). He deduced the value $-0.10\text{ }^{\circ}\text{C}$ for the average temperature coefficient based upon daily averages, with a seasonal variation yielding 1.6 for the ratio of the temperature coefficient for winter months to that for summer months, and he also deduced the value $-0.24\text{ }^{\circ}\text{C}$ for the temperature coefficient based on monthly averages. Our experimental temperature coefficients for the radiation producing the burst-corrected ionization were practically the same whether based on daily averages or on monthly averages, did not display any regular seasonal variation, and were only about half as great as the one of his values and a fourth as great as the other. They were, however, of the same order of magnitude. With this in mind, it is rather interesting that the new and more reliable values of the temperature coefficient of the radiation producing the small bursts are nearly the same whether based on daily averages or on monthly averages, do not display any regular seasonal variation, and are about 25 times as great as the one of Duperier's values and about 10 times as great as the other, deduced on the basis of the decay of muons. Thus, the coefficients for the burst-producing radiation are definitely of a higher order of magnitude than is to be expected of muons.

5. - Relation between Barometric Pressure and Air Temperature.

While the bearing on the main problem does not appear to be very great, it seems worth mentioning briefly the local atmospheric pressure-temperature relation. For the 1938-9 series, b_{23} was negative for 16 and positive for only 2 of the individual 18 months. Yet the value of b_{23} obtained by using daily average values for all 534 days with CR data was positive and corresponded to an atmospheric pressure-temperature coefficient of $0.06 \text{ mm } ^{\circ}\text{C}$. Use of monthly averages for this series yielded a positive coefficient of $0.13 \text{ mm } ^{\circ}\text{C}$.

For the 1947-8-9 series, the situation was much the same, b_{23} being negative for 13 and positive for only 6 of the 19 individual months of this series. Yet the value of b_{23} obtained by using daily average values for all 581 days with CR data was positive and represented a pressure-temperature coefficient of

⁽⁸⁾ A. DUPERIER: *Proc. Phys. Soc. (London)*, A **61**, 34 (1948).

⁽⁹⁾ H. D. RATHGEBER: *Naturwiss.*, **26**, 842 (1938); M. KIDNAPILLAI: *Phys. Rev.*, **72**, 518 (1947).

0.12 mm/ $^{\circ}$ C. The positive correlation between monthly average values of pressure and temperature for this series was illustrated in fig. 2 of reference 1.

The occasional occurrence of a positive pressure-temperature correlation for a particular month does not appear to depend upon the season. During the total of more than 3 years investigated, a positive monthly pressure-temperature correlation did not occur twice for any one of the 12 months of the year.

6. - Computation of Mass Absorption Coefficients from Barometric Coefficients.

As mentioned in the preceding paper (1), an estimate of $\lambda = 1/\mu$, the mass absorption coefficient or the mean free path for absorption, may be made from the barometric coefficient. The estimate suggested there, the first approximation, $\lambda' = 136/-b_{12.3}$ ($: 1/\alpha$ to be defined later) in g/cm², is rather good for very large barometric coefficients corresponding to short ranges, but is very poor for small coefficients such as that for the radiation producing the burst-corrected ionization in a heavily shielded chamber. This really assumes exponential absorption in the atmosphere with all the radiation incident vertically. The greater its range, the more important is that radiation incident at considerable angles from the vertical. In an earlier paper (10) an approximation was obtained for the absorption provided by horizontal disks of finite radius and thickness located symmetrically above the ion chamber, on the assumption that the radiation was incident isotropically from above the apparatus. In considering the interpretation of a wide range of barometric coefficients in terms of atmospheric absorption, it seems worth extending this to the case of the atmosphere.

Ignoring the considerable irregular local shielding by the building, we regard the atmosphere as an infinite horizontal sheet of uniform density and thickness T proportional to the barometric pressure. For a radiation with a particular exponential absorption coefficient μ in the atmosphere, incident upon the atmosphere with initial intensity I_0 isotropically from above, the intensity of the radiation reaching the apparatus within the differential conical solid angle $d\Omega$ is $dI = I_0 \exp [-\mu T \sec \theta] d\Omega/2\pi = I_0 \exp [-\mu T \sec \theta] \sin \theta d\theta$.

The total intensity of the radiation of this penetrability passing through the atmosphere to the measuring apparatus is then

$$I = I_0 \int_0^{\pi/2} \exp [-\mu T \sec \theta] \sin \theta d\theta = I_0 \int_1^{\infty} \exp [-\mu Ty] y^{-\frac{1}{2}} dy,$$

(10) J. W. BROXON: *Phys. Rev.*, **37**, 1320 (1931).

where $y = \sec \theta$. Hence $dI/dT = -\mu I_0 \int_1^\infty \exp[-\mu Ty] y^{-1} dy$.

Putting $\alpha = (-dI/dT)/I$,

$$\begin{aligned}\alpha/\mu &= \int_1^\infty \exp[-\mu Ty] y^{-1} dy \div \int_1^\infty \exp[-\mu Ty] y^{-2} dy = \\ &= \int_1^\infty \exp[-\mu Ty] y^{-1} dy \div \left(\exp[-\mu T] - \mu T \int_1^\infty \exp[-\mu Ty] y^{-1} dy \right),\end{aligned}$$

upon integration by parts. (For radiation entirely vertical, $\alpha = \mu$). Putting $\mu T = x$ and $xy = t$,

$$\int_1^\infty \exp[-\mu Ty] y^{-1} dy = \int_x^\infty \exp[-t] t^{-1} dt = -Ei(-x),$$

one of the exponential integrals tabulated in W. P. A. tables. For the moment, let A represent $-Ei(-x)$.

Then $\alpha/\mu = \alpha T/x = A/(e^{-x} - xA)$,

$$\alpha T + 1 = 1 + xA/(e^{-x} - xA) = e^{-x}/(e^{-x} - xA),$$

$$\alpha T/(\alpha T + 1) = xe^x A = xe^x[-Ei(-x)] = k,$$

where k is the constant (for a particular location and barometric coefficient), $\alpha T/(\alpha T + 1)$. Incidentally, $I/I_0 = e^{-x} - x[-Ei(-x)]$, as shown also by Gross (11).

If $b_{12.3}$ is the barometric coefficient as herein evaluated in %/mm Hg, then $\alpha = -b_{12.3}/136 \text{ cm}^2/\text{g}$. If B is the mean barometric pressure in mm Hg, then $T = 1.36 B \text{ g/cm}^2$. Consequently, $\alpha T = -0.01 B b_{12.3}$, from which k is readily evaluated. Obtaining x from $f(x) = xe^x[-Ei(-x)] = k$, we immediately have $\lambda = 1/\mu = T/x$, where λ is in g/cm^2 if T is so expressed.

Since the tabulated values of $-Ei(-x)$ extend only from $x = 0$ to $x = 15$ in the W. P. A. tables, the latter corresponding to $b_{12.3} = -2.55\%/\text{mm Hg}$ at Boulder, other means must be used for evaluating λ corresponding to such large barometric coefficients. Excellent approximations in this region are provided by the asymptotic series for $-Ei(-x)$ included with the W. P. A. tables (vol. I, p. xii). This gives for our equation,

$$f(x) = xe^x[-Ei(-x)] \sim 1 - 1/x + 2!/x^2 - 3!/x^3 + 4!/x^4 - \dots = k,$$

(11) B. Gross: *Zeits. f. Phys.*, 83, 214 (1933).

the error caused by using a finite number of terms being essentially of the order of magnitude of the last term retained.

It may be noted that the first three terms of the series expansion of $f(x)$ are the same as the first three terms of $(x + 1)/(x + 2)$. If the barometric coefficient is so large that we need not retain more than three terms or may disregard the differences among the remaining terms, we may set $(x + 1)/(x + 2) = k$. Evaluating x and k in terms of α , T , and μ , we obtain from this, $1/\lambda - \mu \cong \cong \alpha - 1/T$, which is the approximation used by STINCHCOMB⁽⁶⁾ and which is quite adequate for the larger barometric coefficients considered here.

7. - Values of Mass Absorption Coefficient; Discussion.

Returning to the value $b_{12.3} = -0.174\%/\text{mm Hg}$ for the barometric coefficient of the radiation producing the burst-corrected CR ionization, taking $B = 623 \text{ mm Hg}$ at Boulder, and beginning with the simplest approximation, we readily find by use of the tables that the corresponding $x = 0.667$. This yields $\lambda = 1/\mu = T/x = 1250 \text{ g/cm}^2$. This is quite different from the first approximation⁽¹⁾, $\lambda' = 1/\alpha = 782 \text{ g/cm}^2$. The corresponding barometric coefficient measured by HOGG⁽⁵⁾, $b_{12.3} = -0.275\%/\text{mm Hg}$ with $B = 695 \text{ mm Hg}$ at Canberra, yields $\lambda = 687 \text{ g/cm}^2$, a good deal smaller than that obtained with the heavy shielding at Boulder. The corresponding barometric coefficient obtained by STEINKE⁽⁴⁾ *et al.*, $-0.2\%/\text{mm Hg}$, yields (upon assuming $B = 755 \text{ mm Hg}$) $\lambda = 999 \text{ g/cm}^2$, intermediate between the other two values. These values of λ for the burst-corrected ionization probably indicate fairly well the total effective shielding in these three investigations.

Employing the same respective values for B , we next evaluate the mass absorption coefficient of the burst-producing radiation in each instance. First we employ the barometric coefficient for the 1 mm bursts at Boulder, $b_{12.3} = -4.58\%/\text{mm Hg}$ based on daily averages. Again beginning with an approximation for x provided by αT , but this time using 5 variable terms of the series, we again find readily that the corresponding $x = 27.60$, yielding $\lambda = 30.7 \text{ g/cm}^2$. In this case the approximation $\lambda' = 1/\alpha = 29.7 \text{ g/cm}^2$ is in fair agreement. The approximation used by STINCHCOMB⁽⁶⁾ yields $\lambda = 30.8 \text{ g/cm}^2$ which is quite satisfactory. It is not at all satisfactory for cases such as the first one considered in this section, however.

The barometric coefficient $b_{12.3} = -9.05\%/\text{mm Hg}$, obtained from monthly averages, yields $\lambda = 15.3 \text{ g/cm}^2$.

HOGG's⁽⁵⁾ barometric coefficient of the small-burst-producing radiation, $-3.25\%/\text{mm Hg}$, yields the mass absorption coefficient $\lambda = 43.6 \text{ g/cm}^2$.

The small-burst barometric coefficient, $-5\%/\text{mm Hg}$ determined by STEINKE⁽⁴⁾ *et al.*, yields $\lambda = 27.9 \text{ g/cm}^2$ upon assuming B as above.

The not very accurate small-burst coefficient obtained by MONTGOMERY and MONTGOMERY (7), $-7.1\%/\text{mm Hg}$ with a mean barometric pressure $B = 445 \text{ mm Hg}$, yields $\lambda = 19.7 \text{ g/cm}^2$. In view of the inaccuracy of this barometric coefficient, we note that subtraction of the probable error results in a coefficient of $-4.8\%/\text{mm}$ which corresponds to $\lambda = 29.6 \text{ g/cm}^2$, while addition of the probable error results in a coefficient of $-9.4\%/\text{mm}$ which corresponds to $\lambda = 14.8 \text{ g/cm}^2$.

STINCHCOMB (6) found that the barometric coefficient, $-2.3 \pm 0.5\%/\text{mm Hg}$ which he obtained for his large bursts after correcting for bursts produced by μ -mesons, represented a mass absorption coefficient or absorption mean free path of $65 \pm 14 \text{ g/cm}^2$ for the radiation producing them.

Apart from the errors of measurement, there appear to be some real differences among the barometric effects measured by different experimenters, and among the related absorption coefficients of the radiation (or radiations) producing the cosmic-ray bursts. Once the radiation is properly identified, the differences may be explicable in terms of the conditions of measurement. There is general agreement among the observers that the radiation producing the bursts has a remarkably large barometric coefficient indicating remarkably small mass absorption coefficients in the atmosphere or large cross-sections for absorption.

In 1933, STEINKE (4) *et al* concluded that the small bursts they observed were the result of atomic disintegrations effected by a highly absorbable, strongly disintegrating, and slightly ionizing component of the cosmic radiation. In 1935, MONTGOMERY and MONTGOMERY (7) concluded that the small bursts were produced by a slightly or non-ionizing radiation and that either it was not absorbed exponentially or the probability of its producing bursts varied with altitude.

HOGG (5) has suggested that the smaller bursts represent «nuclear disintegrations produced by protons or some particle heavier than mesons», and that «the larger bursts are produced by mesons».

In interpreting the absorption mean free path, 65 g/cm^2 in air, which STINCHCOMB (6) found from the barometric effect for his large bursts (not associated with showers and not produced by muons), he pointed out its near equality to the collision mean free path in the atmosphere which he found to be 67 g/cm^2 (corresponding to the geometrical cross section). Reasoning that the primary radiation responsible for the production of these large bursts (whether directly or through the agency of secondary radiation) must be absorbed as readily as indicated by the absorption mean free path obtained experimentally, and that on the other hand its absorption mean free path could not be less than the collision mean free path, he concluded that the primary radiation responsible for the large bursts must have an absorption mean free path of about 70 g/cm^2 . Eliminating neutrons, he concluded that

the large bursts exhibiting the barometric coefficient, $-2.3\%/\text{mm Hg}$, were produced by very high energy (greater than 60 Gev) protons and/or π -mesons produced by them. Rossi⁽¹²⁾ has stated that, «It is reasonable to assume on theoretical grounds, that the cross section for high energy nuclear interactions is at most equal to the geometrical cross section of the nucleus.... The collision thickness in air corresponding to the geometrical cross section is 65 g cm^{-2} . The mean free path experimentally determined for the nucleons of high energy to which penetrating showers are usually attributed, is commonly nearly twice this amount.

The mean free path for atmospheric absorption of the radiation responsible for the small bursts investigated at Boulder (as computed above) appears to be much less than the collision mean free path. This situation is substantiated by the data of the other experimenters who investigated small bursts. For the value based on daily averages at Boulder, we have the ratio $67/30.7 = 2.2$ for collision free path to absorption free path, indicating an absorption cross section 2.2 times as great as the geometrical cross section of the nucleus. The value based on monthly averages is about twice as great as this.

A value of λ comparable to those obtained for the small bursts was obtained by DAINTON and KENT⁽¹³⁾ by observing the dependence upon zenith angle of tracks produced in photographic emulsion by heavy ($Z \geq 5$) cosmic-ray particles at an altitude of 68 000 ft. For the mean free path of disappearance of these in air, they obtained $\lambda \sim 28 \text{ g/cm}^2$. They suggested that an appreciable fraction of these may not be primary particles. For their flux at the top of the atmosphere, they obtained about 1.3×10^{-3} particles $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ steradian¹. If this is correct, it appears that there would be far too few such particles to account directly for the small bursts at Boulder.

Any radiation postulated to produce the small bursts must be characterized both by the large barometric effect and by the large atmospheric temperature effect which appear to be reliably established by this investigation. In view of the lack of evidence for the great flux of radiation at the top of the atmosphere which would be required to account directly for the small bursts observed at Boulder if its mean free path for absorption were as small as indicated above, it would seem not unreasonable to suppose that the bursts may be induced by interaction with the local shielding material, of a less absorbable subsidiary radiation whose parent radiation is readily absorbable in the upper atmosphere. It is on the basis of such an assumption that the relatively small barometric and temperature coefficients measured for the burst-corrected ionization have been explained^(8,9) fairly satisfactorily upon the assumption that

⁽¹²⁾ B. Rossi: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).

⁽¹³⁾ A. D. DAINTON and D. W. KENT: *Phil. Mag.*, **41**, 963 (1950).

the ionization is produced by the unstable muons generated in the upper atmosphere. If, for instance, heavy particles give rise to more penetrating radiations, and if these penetrating radiations or some of the generating heavy particles of secondary origin are unstable, then it would seem possible by means of mean lives and mean free paths differing appreciably from those of the common muons supposed to be responsible for the burst-corrected ionization, to explain the very much larger barometric and temperature coefficients obtained for the small bursts. If such an explanation were valid, then the procedure adopted above for computing the mean free path for absorption of the burst-producing radiation would require modification.

The writer is pleased to acknowledge profitable discussion with Professor W. E. BRITTIN of this department.

RIASSUNTO (*)

Il presente lavoro fa seguito a un lavoro precedente⁽¹⁾. Si sono rielaborati i dati sui raggi cosmici, riferintisi a tre dei diciannove mesi già presi in considerazione nel suddetto lavoro, senza però ottenere un soddisfacente miglioramento dei risultati. Il trattamento statistico dei dati dedotti da una precedente serie di osservazioni durata diciotto mesi nel 1938-39 è stata completata con risultati assai soddisfacenti. Per una classe di burst comprendenti circa 75 a 95 particelle in una camera ad alta pressione pesantemente schemata ad un'altezza di 5 440 piedi (~ 1700 m) sono stati rilevati i seguenti coefficienti barometrici e di temperatura atmosferici: 4,58%/mm Hg e 2,53%/ $^{\circ}$ C, in base a valori medi giornalieri; e 9,05%/mm Hg e 2,19%/ $^{\circ}$ C, in base a valori medi mensili. Rispetto ai coefficienti basati sui valori medi giornalieri il rapporto del coefficiente barometrico della radiazione producente i piccoli burst a quello della radiazione producente la ionizzazione corretta dai burst è circa 26, mentre il corrispondente rapporto dei coefficienti di temperatura è circa 45. Segue una discussione sulla natura della radiazione producente i burst che è caratterizzata da coefficienti barometrici e di temperatura così elevati.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

The current density in quantum electrodynamics.

H. C. CORBEN

Carnegie Institute of Technology - Pittsburgh Penn. (U.S.A)
and Istituto di Fisica dell'Università - Genova

(ricevuto il 30 Agosto 1952)

Summary. — The formulation of field theory given previously suggests an alternative expression for the current density in quantum electrodynamics. This expression is gauge-invariant and conserved and differs from the usual current density by the divergence of a tensor which vanishes in the absence of a field. Corresponding to this current is a new electromagnetic field, which differs from the old only in the presence of particles. The energy density of this new field then contains the interaction energy of the magnetic moments of the particles with the magnetic field, together with some terms which are small for atomic electrons.

1. — Introduction.

Various authors have recently employed an extra parameter w in the development of quantum electrodynamics ⁽¹⁾, replacing the mass term in the Dirac equation by a partial derivative with respect to w and treating the field operators as functions of \mathbf{r} , t and w . Following the method of a previous paper ⁽²⁾, we here develop this concept, showing in particular how it may lead to a new expression for the current density and to a new electromagnetic field the energy density of which possesses some interesting properties.

It has been shown in I that the usual Dirac equation for a system of

⁽¹⁾ Y. NAMBU: *Prog. Theor. Phys. Japan*, **5**, 82 (1950); Y. KATAYAMA, K. SAWADA and S. TAKAGI: *Prog. Theor. Phys. Japan*, **5**, 14 (1950); Y. KATAYAMA and S. TAKAGI: *Prog. Theor. Phys. Japan*, **5**, 336 (1950); R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **84**, 180 (1951).

⁽²⁾ H. C. CORBEN: *Nuovo Cimento*, **9**, 580 (1952). Referred to as I.

electrons, positrons, and neutrinos interacting with an electromagnetic field may be written in the form

$$(1.1) \quad \Gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0,$$

where μ runs from 1 to 5, ψ being considered as a function of the five variables x^μ ($\equiv \mathbf{r}, i\epsilon t, w$) (w real).

In this equation

$$(1.2) \quad \begin{cases} \Gamma^i = \gamma_i, \\ \Gamma^5 = \gamma_5 - b\gamma_i A_i, \end{cases} \quad b = \frac{e_0}{m_0 c^2} > 0,$$

where i will always run from 1 to 4 and where e_0, m_0 are the charge and rest mass of the positron. The γ_μ are the Dirac operators ($-i\beta\alpha, \beta, -\varrho_1$):

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu},$$

and the charge e of a particle is represented by the operator

$$(1.3) \quad e = -ib\hbar c \partial_5 \quad \left(\partial_5 = \frac{\partial}{\partial x^5} = \frac{\partial}{\partial w} \right)$$

applied to ψ . Thus here it is the charge rather than the mass that is related to ∂_5 . However, in virtue of the choice of the value of b , the usual mass term appears in (1.1), which may be written

$$(1.1') \quad W\psi = \left[e\varphi + e\alpha \cdot \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + \frac{e}{e_0} \varrho_2 m_0 c^2 \right] \psi,$$

for a particle of charge e . The last term is $-\varrho_2 m_0 c^2, +\varrho_2 m_0 c^2$ or zero for electrons, positrons, and neutrinos respectively, and gives the usual term under the transformation $\varrho_2 \rightarrow \varrho_3, \varrho_3 \rightarrow -\varrho_2$.

It was assumed in I that each ψ is periodic in the variable w , with a periodicity $l = h/m_0 c$, while the A^i are supposed independent of w . The former assumption guarantees charge quantization and charge conservation, the latter guarantees that the electromagnetic field should carry no charge and that the charge on each particle should be a constant of the motion. We retain these assumptions here.

The equation of motion (1.1) is derivable from the Lagrangian

$$(1.4) \quad L = \frac{i\hbar e}{2} (\psi^+ \Gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \psi^+ \Gamma^\mu \psi),$$

where $\psi^+ = i\psi^*\beta$, and the unsymmetrical energy-momentum-current matrix

$$T^\mu_\nu = \hbar^{-1} \int_0^l \mathcal{C}^\mu_\nu dw,$$

with

$$(1.5) \quad \mathcal{C}^\mu_\nu = \frac{-i\hbar c}{2} (\psi^+ \Gamma^\mu \partial_\nu \psi - \partial_\nu \psi^+ \Gamma^\mu \psi),$$

then yields the usual canonical energy-momentum tensor and also gives, for particles of charge e , the usual current density

$$(1.6) \quad j_i = bc T^i_5 = ec \psi^+ \gamma_i \psi.$$

For a free particle, Eq. (1.1') becomes

$$(1.1'') \quad W\psi = e(\alpha \cdot p + \varrho_2 p_5), \quad (p_5 = e/bc)$$

of which four independent solutions are

$$\psi^n = u^n \exp [-i\hbar^{-1} p_\mu x^\mu],$$

with

$$(1.7) \quad e = \pm b(W^2 - p^2 c^2)^{1/2}.$$

With the usual representation one may take for the u^n

$$(1.8) \quad \begin{cases} u^1 = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1(ep_z + ib^{-1}e) \\ cW^{-1}(p_x + ip_y) \end{pmatrix}; & u^2 = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ cW^{-1}(p_x - ip_y) \\ -W^{-1}(ep_z - ib^{-1}e) \end{pmatrix} \\ u^3 = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} W^{-1}(cp_z - ib^{-1}e) \\ cW^{-1}(p_x + ip_y) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; & u^4 = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} cW^{-1}(p_x - ip_y) \\ -W^{-1}(cp_z + ib^{-1}e) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

These are normalized in the sense $u^* u = 1$, and for each solution one has

$$(1.9) \quad bcp_i(u^+ \gamma_5 u) = eu^+ \gamma_i u,$$

or

$$bc\mathbf{p}(u^* \varrho_2 u) = eu^* \alpha u; \quad bW(u^* \varrho_2 u) = eu^* u.$$

If

$$\psi = u \exp [i\hbar^{-1} p_\mu x^\mu], \quad \varphi = v \exp [-i\hbar^{-1} p_\mu x^\mu],$$

are two solutions of (1.11"), the spinors u, v in this formulation satisfy the same equation, even though they refer to opposite signs of the charge. Alternatively, one may also show that $v = Cu^*$, where C commutes with α_x, α_z and anticommutes with α_y, ϱ_2 ; so that one may take for the charge conjugate operator C :

$$C = i\varrho_3\sigma_y \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

It is then easily verified that the operator C transforms the above solutions into the conjugate complexes of each other:

$$C\bar{u}^1 = -u^2, \quad C\bar{u}^2 = u^1, \quad C\bar{u}^3 = u^4, \quad C\bar{u}^4 = -u^3,$$

the bar denoting conjugate complex without transposing.

2. – Energy, momentum, and current densities.

There is of course always some arbitrariness in the choice of the energy-momentum tensor of a field, and in the case of electrons and positrons interacting with an electromagnetic field we may write for the canonical and symmetrical tensors (3)

$$(2.1) \quad T_{ij}^{(c)} = -\frac{i\hbar c}{2} (\psi^+ \gamma_i \partial_j \psi - \partial_j \psi^+ \gamma_i \psi),$$

$$(2.2) \quad T_{ij}^{(s)} = -\frac{i\hbar c}{4} (\psi^+ \gamma_i D_j \psi + \psi^+ \gamma_j D_i \psi - D_j^* \psi^+ \gamma_i \psi - D_i^* \psi^+ \gamma_j \psi),$$

or

$$(2.3) \quad t_{ij} = -\frac{i\hbar c}{2} (\psi^+ \gamma_i D_j \psi - D_j^* \psi^+ \gamma_i \psi) = T_{ij}^{(c)} - \frac{j_i A_j}{c},$$

(3) G. WENTZEL: *Quantum Theory of Fields* (Interscience, 1949), pp. 170, 189.

with

$$j_i = e\bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad D_i = \partial_i - \frac{ie}{\hbar c}A_i, \quad D_i^* = \partial_i + \frac{ie}{\hbar c}A_i \quad (\text{operating only on } \psi^+).$$

These satisfy the relations

$$\partial_i T_{ij}^{(c)} = \frac{j_i}{e} \partial_j A_i; \quad T_{ij}^{(s)} = \frac{1}{2} (t_{ij} + t_{ji}); \quad \partial_i j_i = 0,$$

$$\partial_i T_{ij}^{(s)} = \partial_i t_{ij} = \partial_i t_{ji} = -\frac{j_i}{e} f_{ij},$$

while the total energy-momentum tensor of particles and field may be written

$$T_{ij}^{(t)} = T_{ij}^{(c)} + \frac{1}{4\pi} \left[f_{ik} \partial_j A_k - \frac{1}{4} \delta_{ij} f_{kl} f_{kl} \right],$$

with

$$\partial_i T_{ij}^{(t)} = 0,$$

in virtue of the equation

$$(2.4) \quad \partial_i f_{ik} = -\frac{4\pi}{e} j_k.$$

One may simplify the notation by introducing the reciprocal tensors

$$(2.5) \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & -bA_i \\ -bA_j & 1 + b^2 A_k A_k \end{pmatrix}; \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} + b^2 A_i A_j & bA_i \\ bA_j & 1 \end{pmatrix},$$

and by writing

$$(1.2) \quad \Gamma^\mu = (\gamma_i, \gamma_5 - b\gamma_i A_i), \quad \Gamma_\mu = (\gamma_i + b\gamma_5 A_i, \gamma_5).$$

We are not implying by this that the $g_{\mu\nu}$ are related to the metric of space-time but are merely using upper and lower indices as a convenient notation.

Thus

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu, \quad g_{\mu\nu} \Gamma^\nu = \Gamma_\mu, \quad g^{\mu\nu} \Gamma_\nu = \Gamma^\mu,$$

and

$$(2.6) \quad \begin{cases} \Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \\ \Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \\ \Gamma^\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma^\mu = 2\delta_\nu^\mu, \end{cases}$$

We may also introduce the operator

$$(2.7) \quad \delta^\mu = g^{\mu\nu} \delta_\nu = (\delta_i - bA_i \delta_5, \delta_5 - bA_j \delta^j),$$

so that for particles of charge e

$$\begin{aligned} \delta^i &= D_i, && \text{when applied to } \psi \\ \delta^i &= D_i^*, && \text{when applied to } \psi^+ \end{aligned}$$

and (1.1) may be written

$$(1.1) \quad \Gamma^\mu \delta_\mu \psi = \Gamma_\mu \delta^\mu \psi = 0.$$

For a field of particles of given charge, the different energy-momentum tensors (2.1) (2.2) (2.3) are then seen to be related to different components of the canonical tensor (1.5) thus:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{ij} &= T_{ij}^{(c)}; & \mathcal{C}^{ij} &= t_{ij}, \\ \frac{1}{2} (\mathcal{C}^{ij} + \mathcal{C}^{ji}) &= T_{ij}^{(s)}, \end{aligned}$$

and we therefore introduce the symmetrical energy-momentum-current tensor

$$(2.8) \quad \Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathcal{C}^{\mu\nu} + \mathcal{C}^{\nu\mu}),$$

the i, j components of which form the symmetrical energy-momentum tensor (2.2). In this way, however, we have introduced two alternative expressions for the current density

$$(2.9) \quad j_i^* = bc \mathcal{C}_5^i = -\frac{1}{2} ibc^2 \hbar (\psi^+ \gamma_5 D_i \psi - D_i^* \psi^+ \gamma_5 \psi),$$

and

$$(2.10) \quad s_i = bc \Theta_5^i = \frac{1}{2} (j_i + j_i^*),$$

where

$$(2.11) \quad j_i = bc \mathcal{C}_5^i = ee \psi^+ \gamma_i \psi.$$

Evidently these expressions are gauge-invariant and it may be verified that they are independently conserved in virtue of the Dirac equation (1.1). We note that in this formulation these current-densities are pseudo-vectors, e being a pseudo-scalar and A_i a pseudo-vector.

We consider in the following the possibility of defining j_i^* rather than j_i as the current density in quantum electrodynamics.

3. – The current density j_i^* .

At first it would appear that j_i^* has non-zero components for a neutral particle, since there are terms in j_i^* which are independent of the charge e . From (1.9), however, it follows that for a neutral particle subject to no forces, $j_i^* = 0$. It also follows from (1.9) that, for free particles of charge e , $j_i^* : j_i$.

By using Dirac's equation one may show, after some manipulation, that the expression (2.9) for j_i^* may be alternatively written thus:

$$(3.1) \quad j_i^* = j_i + \frac{e}{4\pi} \partial_j h_{ji},$$

where

$$(3.2) \quad h_{ij} = -h_{ji} = -ibeh\psi^+ \gamma_5 (\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}) \psi.$$

In this form the conservation property of j_i^* is obvious. Thus the new current density differs from the old by the divergence of a tensor, so that in calculating the total charge inside a large volume it is immaterial which charge density is used. We have in fact that if

$$j_i^* = (\mathbf{j}^*, ie\varrho^*) ; \quad j_i = (\mathbf{j}, ie\varrho),$$

then

$$(3.1') \quad \begin{cases} \mathbf{j}^* = \mathbf{j} - \frac{1}{2} bc^2 \hbar \left[\nabla \wedge (\psi^* \varrho_2 \sigma \psi) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \varrho_2 \sigma \psi) \right], \\ \varrho^* = \varrho - \frac{1}{2} bc^2 \hbar \nabla \cdot (\psi^* \varrho_2 \sigma \psi), \end{cases}$$

so that

$$\int \varrho^* dV = \int \varrho dV = e \int \psi^* \psi dV,$$

if the normal component of $\text{grad } \psi$ vanishes on the boundary of the volume of integration. Thus j_i and j_i^* differ by a Pauli-type « magnetic current », ap-

appropriately modified to include neutrinos. Further, if

$$(3.3) \quad \partial_i f_{ij} = -\frac{4\pi}{c} j_j ,$$

we may introduce new field strengths f_{ij}^* , derived from the new current density j_j^* :

$$(3.4) \quad \partial_i f_{ij}^* = -\frac{4\pi}{c} j_j^* ,$$

where

$$(3.5) \quad f_{ij}^* = f_{ij} - h_{ij} .$$

Thus

$$(3.5') \quad \begin{cases} \mathbf{E}^* = \mathbf{E} - \frac{e_0 h}{m_0 c} \psi^* \varrho_3 \boldsymbol{\sigma} \psi , \\ \mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \frac{e_0 h}{m_0 c} \psi^* \varrho_2 \boldsymbol{\sigma} \psi , \end{cases}$$

if we use the value (1.2) of b .

In the same way that j_j^* differs from j_j only in the presence of an electromagnetic field, so f_{ij}^* differs from f_{ij} only in the presence of a particle field. In general it is not necessary for the particles to carry a charge for f_{ij}^* and f_{ij} to differ, since h_{ij} does not contain the charge explicitly. In this theory the only neutral particles which appear are neutrinos, and in a sufficiently concentrated field of these f_{ij}^* and f_{ij} may differ widely.

With this new field f_{ij}^* we may associate an energy density

$$\frac{1}{8\pi} (E^{*2} + H^{*2}) = X + Y + Z ,$$

where

$$X = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) ,$$

$$Y = -\frac{e_0 \hbar}{2mc_0} [\psi^* (\varrho_2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} + \varrho_3 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}) \psi] = -\frac{e_0 \hbar}{2m_0 c} [\psi^* \varrho_2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} + i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}) \psi] ,$$

$$Z = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e_0 \hbar}{m_0 c} \right)^2 [(\psi^* \varrho_2 \boldsymbol{\sigma} \psi)^2 + (\psi^* \varrho_3 \boldsymbol{\sigma} \psi)^2] .$$

In the formulation we have been using ϱ_2 is a «large» operator and ϱ_3 a «small» operator for slow particles, and in fact for free particles at rest

we have, from (1.8),

$$\varrho_2 \psi = \frac{e}{\epsilon_0} \psi .$$

The first term of Y is therefore, approximately,

$$-\frac{e\hbar}{2m_0c} (\psi^* \sigma \psi) \cdot \mathbf{H} ,$$

so that the interaction energy of the magnetic moments of the particles with the magnetic field is included in the energy associated with the field f_{ij}^* . The second term in Y arises from the induced electric moment on a moving particle — the presence of ϱ_2 assures that this energy be real.

Of the two terms of Z , the first is larger, and for a particle density of 1 per r^3 it is, when integrated over a volume r^3 , of order

$$\left(\frac{e}{e_0}\right)^2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 \left(\frac{\hbar c}{e_0^2}\right)^2 m_0 e^3 ,$$

where r_0 is the classical electron radius. This could therefore well be important were an electron confined to nuclear dimensions but for an H-atom it is of the fine structure order

$$\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4 \frac{m_0 e^3}{n^6} .$$

In a subsequent paper we discuss the possibility of introducing j_i^* and f_{ij}^* instead of j_i , f_{ij} into the Lagrangian of particles and field.

I am grateful to the Fulbright Commission for a visiting professorship to the Universities of Genoa and Milan.

RIASSUNTO (*)

La formulazione della teoria dei campi data precedentemente suggerisce quale alternativa, un'espressione per la densità di corrente nell'elettrodinamica quantistica. Quest'espressione è invariante rispetto al gauge e conservativa, e differisce da quella usuale della densità di corrente per la divergenza di un tensore che si annulla in assenza di campo. A questa corrente corrisponde un nuovo campo elettromagnetico che differisce da quello usuale solo in presenza di particelle. La densità d'energia di questo nuovo campo contiene allora l'energia d'interazione dei momenti magnetici delle particelle col campo magnetico assieme ad alcuni termini che per gli elettroni atomici sono piccoli.

(*) Traduzione a cura della Redazione.

Un semplice modello di due campi interagenti.

A. LOINGER

Istituto di Fisica dell'Università - Pavia

(ricevuto il 20 Settembre 1952)

Riassunto. — Allo scopo, soprattutto, di chiarire il significato delle divergenze che si incontrano nelle teorie dei campi, si studia — col solito metodo della quantizzazione canonica di Heisenberg-Pauli — il modello di due campi interagenti costituito da due corde di eguale lunghezza, diversamente tese, accoppiate elasticamente punto per punto e vibranti trasversalmente nello stesso piano. In particolare, si accerta che un notevole « teorema di ortogonalità » dimostrato da VAN HOVE ⁽²⁾ per un campo bosonico scalare in interazione scalare con un certo numero di sorgenti, non è vero per il nostro modello. Se ne trae la conclusione che la validità del detto teorema non dipende solo dalla circostanza che un campo è un sistema a un numero infinito di gradi di libertà.

1. — È stato osservato ^(1,2,3) come riesca abbastanza istruttivo per la comprensione di quel che significhino le ben note divergenze delle teorie dei campi, lo studio di qualche sistema particolarmente semplice, del quale si possano determinare con esattezza gli stati stazionari. Il confronto coi risultati forniti dalla teoria delle perturbazioni consente poi di farsi un'idea sulla effettiva applicabilità di quest'ultima. Così SOLLFREY e GOERTZEL ⁽¹⁾ hanno esaminato in dettaglio il modello di una corda fissa agli estremi accoppiata elasticamente nel suo punto di mezzo ad un oscillatore armonico, mentre VAN HOVE ⁽²⁾ ha determinato con un metodo analogo a quello di Bloch e Nordsieck gli stati

⁽¹⁾ W. SOLLFREY e G. GOERTZEL: *Phys. Rev.*, **83**, 1038 (1951).

⁽²⁾ L. VAN HOVE: *Physica*, **18**, 145 (1952). V. anche: L. VAN HOVE: *Sur l'opérateur hamiltonien de deux champs quantifiés en interaction*, in *Bulletin Cl. des Sciences, Ac. R. Belgique* (dicembre 1951). Di questo lavoro non abbiamo però finora potuto prendere visione.

⁽³⁾ N. ROSEN: *Phys. Rev.*, **87**, 173 (A) (1952).

stazionari di un campo bosonico scalare neutro in accoppiamento scalare con un certo numero di sorgenti puntiformi, fisse, infinitamente pesanti.

Il lavoro di VAN HOVE contiene un risultato che ci sembra interessante: lo spazio hilbertiano degli stati stazionari (di energia finita) del campo bosonico in interazione con le sorgenti è *ortogonale* allo spazio hilbertiano degli stati stazionari del campo libero⁽⁴⁾. Ne consegue manifestamente che, *in generale*, non ha alcun senso applicare al sistema detto la teoria delle perturbazioni, per quanto piccola sia la costante di accoppiamento.

Nella presente nota ci proponiamo di esaminare un modello semplicissimo di due campi in interazione, costituito da due corde di eguale lunghezza, diversamente tese, accoppiate elasticamente punto per punto e vibranti trasversalmente nel medesimo piano.

Dapprima studieremo il nostro sistema dal punto di vista classico, poi passeremo alla trattazione quantistica, seguendo il solito metodo della quantizzazione canonica di Heisenberg-Pauli.

In particolare ci interesserà accertare se il «teorema di ortogonalità» di van Hove è verificato anche pel nostro modello.

2. — Se $d_1 = d_2 = d$ sono le masse specifiche lineari delle due corde, τ_1 e τ_2 , le tensioni cui sono sottoposte, $\psi(x, t)$ e $\varphi(x, t)$ i loro spostamenti trasversali, k^2 la costante di accoppiamento elastico, le equazioni del moto del sistema sono:

$$(1) \quad \begin{cases} d\ddot{\psi} = \tau_1(\partial^2\psi/\partial x^2) - k^2(\psi - \varphi), \\ d\ddot{\varphi} = \tau_2(\partial^2\varphi/\partial x^2) - k^2(\varphi - \psi), \end{cases}$$

Posto:

$$v^2 = \tau_1/d; \quad u^2 = \tau_2/d; \quad c^2 \equiv k^2/d,$$

si ha:

$$(2) \quad \begin{cases} v^2(\partial^2\psi/\partial x^2) - \ddot{\psi} - c^2\psi = -c^2\varphi, \\ u^2(\partial^2\varphi/\partial x^2) - \ddot{\varphi} - c^2\varphi = -c^2\psi, \end{cases}$$

Per trovare le soluzioni stazionarie basta, al solito, porre:

$$\psi = \psi_\omega(x)e^{i\omega t}; \quad \varphi = \varphi_\omega(x)e^{i\omega t}.$$

Avremo:

$$(3) \quad \begin{cases} \partial^2\psi_\omega/\partial x^2 + (1/v^2)(\omega^2 - c^2)\psi_\omega + (c^2/v^2)\varphi_\omega = 0, \\ \partial^2\varphi_\omega/\partial x^2 + (1/u^2)(\omega^2 - c^2)\varphi_\omega + (c^2/u^2)\psi_\omega = 0. \end{cases}$$

⁽⁴⁾ In realtà il teorema dimostrato da VAN HOVE è un po' più generale.

Questo sistema si integra immediatamente; le soluzioni fisicamente interessanti sono:

$$(4) \quad \begin{cases} \psi_\omega(x) = A \cos(x/\lambda) + B \sin(x/\lambda), \\ \varphi_\omega(x) = \bar{A} \cos(x/\lambda) + \bar{B} \sin(x/\lambda), \end{cases}$$

ove

$$(5) \quad \frac{1}{\lambda} = \left[\frac{(\omega^2 - c^2) \left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{u^2} \right) + \sqrt{(\omega^2 - c^2)^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2} \right) + 4 \frac{c^4}{u^2 v^2}}}{2} \right]^{1/2},$$

e le costanti di integrazione A , B , \bar{A} , \bar{B} saranno tali che le (4) soddisfino:
a) al sistema differenziale (3); *b)* alle condizioni ai limiti; *c)* alla condizione di normalizzazione.

Da (5), risolvendo rispetto a ω , si trae:

$$\omega' \left\{ \begin{array}{l} \omega' \\ \omega'' \end{array} \right\} = \left[\frac{2c^2 + v^2 + \mu^2 \pm \sqrt{(v^2 - \mu^2)^2 + 4c^4}}{2} \right]^{1/2},$$

ove $v = v/\lambda$; $\mu = u/\lambda$ sono le pulsazioni delle corde libere. Notiamo subito che per $c^2 \rightarrow 0$, $\omega' \rightarrow v$, $\omega'' \rightarrow \mu$.

La densità lagrangiana L del nostro sistema viene ad essere:

$$2L = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 - v^2(\partial\psi/\partial x)^2 - u^2(\partial\varphi/\partial x)^2 - c^2(\psi - \varphi)^2,$$

e quindi l'hamiltoniana differenziale sarà:

$$2H = \pi^2 + \chi^2 + v^2(\partial\psi/\partial x)^2 + u^2(\partial\varphi/\partial x)^2 + c^2(\psi - \varphi)^2,$$

con

$$\pi = (\partial L / \partial \dot{\psi}) = \dot{\psi}; \quad \chi = (\partial L / \partial \dot{\varphi}) = \dot{\varphi}.$$

Sia ora $2l$ la lunghezza comune delle nostre due corde. Le condizioni ai limiti ci danno subito $1/\lambda = n\pi/2l$ ($n = 1, 2, \dots$); da cui:

$$\omega'_n \left\{ \begin{array}{l} \omega'_n \\ \omega''_n \end{array} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{2}l} [8c^2l^2 + n^2\pi^2(v^2 + u^2) \pm \sqrt{n^4\pi^4(v^2 - u^2)^2 + 64l^4c^4}]^{1/2},$$

e

$$(6) \quad \begin{cases} \psi_\omega(x) = N_\omega \sin \frac{n\pi}{2l} (x + l) \\ \varphi_\omega(x) = M_\omega \sin \frac{n\pi}{2l} (x + l) \end{cases}$$

Sostituendo (6) in (3) ed applicando la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-l}^{+l} (\psi_\omega^2 + \varphi_\omega^2) dx = 1,$$

si ha

$$N_\omega = \frac{e^2}{\sqrt{l} \sqrt{e^4 + (v^2 + e^2 - \omega^2)^2}}; \quad M_\omega = \frac{v^2 + e^2 - \omega^2}{\sqrt{l} \sqrt{e^4 + (v^2 + e^2 - \omega^2)^2}}.$$

Prendendo come base le autosoluzioni delle corde libere

$$\psi_{r_n}(x) = \varphi_{n\pi}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi}{2l} (x + l),$$

possiamo sviluppare in serie la $\psi(x, t)$ e la $\varphi(x, t)$, come pure i loro momenti coniugati $\pi(x, t)$, $\chi(x, t)$:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(x, t) = \sum_v \psi_v(x) q_v(t); \quad \varphi(x, t) = \sum_\mu \varphi_\mu(x) q_\mu(t), \\ \pi(x, t) = \sum_v \psi_v(x) p_v(t); \quad \chi(x, t) = \sum_\mu \varphi_\mu(x) p_\mu(t). \end{array} \right.$$

Sostituendo tali sviluppi nell'hamiltoniana $\mathcal{H} = \int_{-l}^{+l} H dx$ si rieava:

$$(8) \quad 2\mathcal{H} = \sum [p_v^2 + p_\mu^2 + v^2 q_v^2 + \mu^2 q_\mu^2 + e^2 (q_v - q_\mu)^2].$$

Se prendessimo invece come base le autosoluzioni delle corde accoppiate

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(x, t) = \sum_\omega \psi_\omega(x) Q_\omega(t); \quad \varphi(x, t) = \sum_\omega \varphi_\omega(x) Q_\omega(t), \\ \pi(x, t) = \sum_\omega \psi_\omega(x) P_\omega(t); \quad \chi(x, t) = \sum_\omega \varphi_\omega(x, t) P_\omega(t), \end{array} \right.$$

otterremmo

$$(10) \quad 2\mathcal{H} = \sum_\omega (P_\omega^2 + \omega^2 Q_\omega^2).$$

Da (7), (9) si trae:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_v = \sqrt{l} (N_{\omega'} Q_{\omega'} + N_{\omega''} Q_{\omega''}), \\ q_\mu = \sqrt{l} (M_{\omega'} Q_{\omega'} + M_{\omega''} Q_{\omega''}). \end{array} \right.$$

La (11) non è altro che la sostituzione ortogonale che riduce la (8) alla forma quadratica pura (10).

3. - Traduciamo ora quantisticamente il nostro problema, introducendo al modo consueto degli operatori ψ, π, φ, χ e q, p, Q, P soddisfacenti alle regole di commutazione. Possiamo anche definire degli operatori di emissione e di assorbimento a^* , a ed A^* , A tali che

$$q_\nu = \sqrt{\frac{\hbar}{2\nu}} (a_\nu + a_\nu^*),$$

$$p_\nu = \sqrt{\frac{\hbar\nu}{2}} i(a_\nu^* - a_\nu), \quad \text{ecc.}$$

Posto $\mathcal{H}_\omega = A_\omega^* A_\omega$ l'hamiltoniano diventa:

$$\mathcal{H} = \sum_\omega \hbar\omega (\mathcal{H}_\omega + 1/2).$$

Viene spontaneo ridefinirlo alla maniera di SOLLFREY e GOERTZEL, cioè omettendo l'energia di zero delle corde accoppiate $\sum(\hbar\omega/2)$, in luogo di $\sum(\hbar\nu + \hbar\mu)/2$, energia di zero delle corde libere, come è invece usuale nelle teorie dei campi.

Con tale ridefinizione il valore medio dell'energia relativo allo stato di vuoto «disaccoppiato» viene ad assumere un valore finito. Sia infatti

$$F_{0'} \equiv f(q_{\nu_1}) \dots f(q_{\nu_k}) \dots f(q_{\mu_1}) \dots f(q_{\mu_k}) \dots$$

l'autofunzione dello stato di vuoto disaccoppiato, ove

$$f(q_\nu) \equiv \sqrt{\frac{\nu}{\hbar\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\nu}{\hbar} q_\nu^2\right].$$

Si tratta di calcolare $\langle \mathcal{H} \rangle_{0'} = \int F_{0'} \mathcal{H} F_{0'}$; si ha subito

$$\langle \mathcal{H} \rangle_{0'} = \sum \left(\frac{\hbar\nu}{2} + \frac{\hbar\mu}{2} - \frac{\hbar\omega}{2} \right) + \frac{\hbar c^2}{2} \sum \left(\frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\mu} \right).$$

Ma, per n grandi, $\omega' = \nu + c^2/2\nu$; $\omega'' = \mu + c^2/2\mu$, quindi alle alte frequenze si ha compensazione e $\langle \mathcal{H} \rangle_{0'}$, come affermato, ha un valore finito. Con la ridefinizione usuale sarebbero invece rimaste le due ultime serie, che avrebbero dato una divergenza di tipo logaritmico.

Se le due corde fossero infinitamente lunghe, le due ultime serie in $\langle \mathcal{H} \rangle_{0'}$ andrebbero sostituite con integrali da 0 a ∞ e pertanto comparirebbe una

divergenza infrarossa, che si potrebbe eliminare solo con un «taglio» più o meno arbitrario.

Notiamo ancora che se la costante di accoppiamento c^2 è piccola rispetto a $(v^2 - \mu^2)$, si ha:

$$\omega' = v \left[1 + \frac{c^2}{2v} \left(1 + \frac{c^2}{v^2 - \mu^2} \right) \right],$$

$$\omega'' = \mu \left[1 + \frac{c^2}{2\mu} \left(1 + \frac{c^2}{\mu^2 - v^2} \right) \right],$$

e pertanto

$$\langle \mathcal{H} \rangle_{\text{o}} = \sum \frac{\hbar c^4}{4} \left[\frac{1}{\mu(v^2 - \mu^2)} + \frac{1}{v(\mu^2 - v^2)} \right] = 0,0775 \hbar c^4 l^3 \frac{1}{uv(u+v)}.$$

4. – Vogliamo ora vedere se anche per il nostro modello è valido il teorema di ortogonalità scoperto da VAN HOVE per il campo bosonico.

Basterà calcolare il prodotto scalare di uno stato stazionario di energia finita (5) delle corde libere e di uno stato stazionario di energia finita delle corde accoppiate. Tale prodotto scalare non differirà ovviamente che per un numero finito di fattori dal prodotto scalare dei corrispondenti stati di vuoto. Perciò tutto si riduce a calcolare quest'ultimo prodotto. Allo scopo di semplificare al massimo i calcoli, supponiamo le due corde egualmente tese (6), in modo che sia $v_n = \mu_n$ ($n = 1, \dots$). La quantità da calcolare sarà allora:

$$(12) \quad \prod_n \int \int f(q'_n) f(q''_n) f(Q_{\omega'_n}) f(Q_{\omega''_n}) dq'_n dq''_n$$

Le Q sono legate alle q dalle:

$$\begin{cases} Q_{\omega'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (q'_v - q''_v), \\ Q_{\omega''} = \frac{1}{\sqrt{2}} (q'_v + q''_v), \end{cases}$$

e

$$\omega' = \sqrt{v^2 + 2c^2}; \quad \omega'' = v.$$

Gli integrali di (12) si calcolano subito e si trova:

$$\prod_n \left\{ \left[\frac{4v \sqrt{v^2 + 2c^2}}{(v + \sqrt{v^2 + 2c^2})^2} \right]^{1/4} \right\}$$

(5) Il limitarsi a tali stati stazionari non è evidentemente una restrizione dal punto di vista fisico, mentre dal lato matematico semplifica molto le cose. Vedi (2).

(6) Questa ipotesi non è, per il nostro scopo, sostanzialmente restrittiva.

Il fattore generale $\{...\}$ tende all'unità per n tendente all' ∞ , ma restando sempre ad essa inferiore. Pertanto il prodotto infinito sarà o assolutamente convergente oppure assolutamente divergente a zero. Per decidere tra le due alternative basta accertare la convergenza o la divergenza della serie di termine generale $1 - \{...\}$.

Ma si vede facilmente che tale serie è minorante rispetto alla serie di termine generale c^2/v^2 , che è notoriamente convergente. E quindi il nostro prodotto infinito converge assolutamente: il teorema di van Hove non è vero nel caso nostro.

Ne possiamo concludere che la validità di questo teorema non dipende solo dal fatto che un campo possiede un numero infinito di gradi di libertà, come viene invece spontaneo congetturare in base al lavoro di VAN HOVE.

Ringrazio vivamente il prof. P. CALDIROLA, che si è assunto l'incarico di leggere il manoscritto.

SUMMARY

In order to elucidate the meaning of the divergences which occur in the field theories, the A. investigates — through the conventional quantization method of Heisenberg-Pauli — a model of interacting fields consisting of two strings elastically coupled point to point and transversally vibrating in the same plane. Particularly, the A. ascertains that a remarkable «orthogonality theorem» which was proved by VAN HOVE⁽²⁾ for a scalar boson field in scalar interaction with several sources, is not true for our model. Conclusion is to be drawn that the aforesaid theorem is not exclusively depending on the fact that a field is a system with an infinity of degrees of freedom.

NOTE TECNICHE

Questioni tecniche sui contatori a radiazione di Cerenkov (I).

P. BASSI e A. M. BIANCHI

Istituto di Fisica dell'Università, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Padova

(ricevuto il 14 Agosto 1952)

Riassunto. — Si descrive una misura sulla dipendenza dall'indice di rifrazione dell'energia emessa per effetto Cerenkov. È posta in evidenza una fluorescenza in plexiglas e acqua confrontabile con l'effetto Cerenkov.

L'effetto Cerenkov consiste nell'emissione di una radiazione in un mezzo materiale al passaggio di particelle cariche a velocità $v > c/n$ (c è la velocità della luce nel vuoto ed n l'indice di rifrazione del mezzo). Il fenomeno fu scoperto da F. CERENKOV⁽¹⁾ nel 1936; la prima interpretazione teorica secondo schemi classici è dovuta a FRANK e TAMM⁽²⁾.

Secondo la teoria, la direzione di emissione forma con la direzione del moto della particella un angolo ϑ per cui

$$(1) \quad \cos \vartheta = 1/\beta n,$$

e l'energia emessa su 1 cm di percorso è

$$(2) \quad W \simeq e^2 l \int_{\beta n > 1} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right).$$

Da quest'ultima relazione, trascurando la dipendenza di n da ω si ha

$$\text{Numero di quanti nel visibile} = 500 \sin^2 \vartheta \text{ per cm}.$$

Le prime esperienze furono eseguite con fasci di particelle emesse da sostanze radioattive o accelerate artificialmente; furono così verificate le pre-

⁽¹⁾ P. A. CERENKOV: *Compt. Rend. Ac. Sc. URSS*, **8**, 451 (1934).

⁽²⁾ I. FRANK e I. TAMM: *Compt. Rend. Ac. Sc. URSS*, **14**, 105 (1937).

visioni teoriche riguardanti la dipendenza di ϑ da n ⁽³⁾, quella di β da ϑ ⁽⁴⁾ e l'ordine di grandezza di W ⁽⁵⁾.

Soltanto nel 1951 si è riusciti a osservare l'effetto dovuto a particelle singole dei raggi cosmici^(5,6,7): sono state verificate in queste condizioni le proprietà già note senza approfondirne ulteriormente lo studio. MARSHALL poté tuttavia mettere in evidenza⁽⁶⁾ la grande rapidità dell'impulso prodotto dal fotomoltiplicatore (dell'ordine di 10^{-9} s).

Un rivelatore che sfrutta l'effetto Cerenkov può essere progettato per i seguenti scopi:

- a) Misura di β dall'angolo ϑ ^(4,8,9).
- b) Misura di β dall'energia emessa W ^(5,7,10).
- c) Misure direzionali⁽⁸⁾.
- d) Misure di carica.
- e) Rivelazione di sciami di particelle relativistiche.

La bassa intensità e la non collimazione dei raggi cosmici rendono problematico l'uso di strumenti del primo tipo; per la misura di β abbiamo preferito rivelatori del tipo b).

Descriviamo in questa nota l'apparato elettronico usato ed alcune misure preliminari di energia emessa; riferiremo in seguito sui risultati ottenuti con contatori direzionali, essendo le misure tuttora in corso.

1. — Dispositivo sperimentale.

Abbiamo usato un circuito di coincidenza fra due contatori G.M. ed il fotomoltiplicatore che rivela la radiazione di Cerenkov (fig. 1). Sia il fotomoltiplicatore che i contatori sono seguiti da opportuni amplificatori adattatori d'impedenza costituiti rispettivamente dalle valvole V_1 e $V_6 V_7 V_{11} V_{12}$.

L'amplificatore del fotomoltiplicatore ($V_2 V_3 V_4 V_5$) è del tipo «unfed back shunt compensated», ha tempo di salita $2 \cdot 10^{-7}$ s, amplificazione dell'ordine di 10^4 e fornisce un impulso positivo che viene inviato al discriminatore V_{14} . L'impulso di coincidenza dei contatori proveniente da V_{13} e opportunamente tagliato da una linea a riflessione a costanti concentrate, è portato a coincidere con l'impulso formato dal discriminatore; nel nostro circuito sono 8 canali identici a quello segnato con tratteggio e formato dalle valvole $V_8 V_9 V_{14}$,

(3) G. B. COLLINS e W. G. REILINGS: *Phys. Rev.*, **54**, 499 (1938).

(4) H. O. WICKOFF e J. E. HENDERSON: *Phys. Rev.*, **64**, 1 (1943).

(5) J. V. JELLEY: *Proc. Phys. Soc.*, **64 A**, 82 (1951).

(6) J. MARSHALL: *Phys. Rev.*, **81**, 275 (1951).

(7) P. BASSI: *Nuovo Cimento*, **8**, 807 (1951).

(8) J. R. WINKLER: *Phys. Rev.*, **85**, 1054 (1952).

(9) I. A. GETTING: *Phys. Rev.*, **71**, 123 (1947).

(10) T. DURDEN e B. D. HYAMS: *Phil. Mag.*, **43**, 717 (1952).

dimodochè, usando polarizzazioni v_i diverse nei vari canali, è possibile avere indicazioni anche sull'altezza dell'impulso. Un circuito di questo tipo ha, oltre a pregi di semplicità, il vantaggio di permettere la discriminazione direttamente all'uscita dell'amplificatore; presenta tuttavia il pericolo d'ingolfamenti

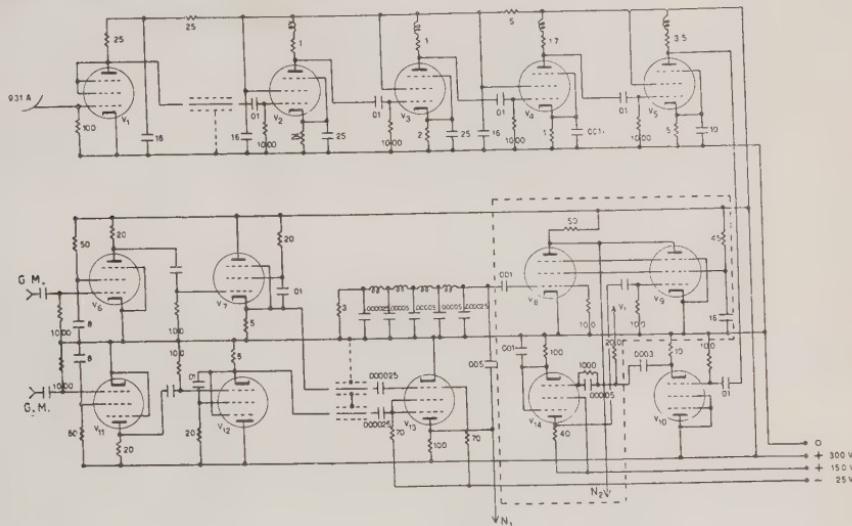


Fig. 1. – Resistenze in $k\Omega$; capacità in μF .

Valvole: $V_1 = 6AK5$; $V_2 V_3 V_6 V_7 V_{10} V_{11} V_{12} V_{13} V_{14} = 6AC7$;
 $V_8 V_9 = 6AG7$; $V_{15} V_{16} = 6SH7$.

dei discriminatori, specie per i canali a polarizzazione più bassa, quando si usi un fotomoltiplicatore con fondo rilevante.

Le alimentazioni anodiche e dei filamenti dell'amplificatore sono stabilizzate; il fotomoltiplicatore del tipo 931A è alimentato a 700 V.

2. – Misure di energia.

Abbiamo cercato di ottenere indicazioni su una eventuale fluorescenza dei materiali usati (acqua e plexiglas) e sulla dipendenza dell'energia W della radiazione di Cerenkov dall'indice di rifrazione.

Per eseguire misure di energia è necessario che le particelle cariche che producono l'effetto Cerenkov, compiano tutte un uguale percorso nel radiatore, che il valore di β sia lo stesso per tutte le particelle (al livello del mare è praticamente $\beta = 1$ per tutti i raggi cosmici) e che il dispositivo sia di tipo integratore. Nell'interpretazione dei risultati abbiamo trascurato le differenze nel comportamento ottico dei materiali usati in corrispondenza della base

superiore del radiatore ed abbiamo fatto alcune schematizzazioni di cui parleremo in seguito.

L'apparecchio è quello descritto in precedenza (7), che consiste (fig. 2) in un cilindro alternativamente di acqua e di plexiglas con pareti argentate, posto al disotto del fotomoltiplicatore, con la base coperta da uno strato di ossido di magnesio; per distinguere la radiazione di Cerenkov da quella di fluorescenza si può sostituire il fondo di MgO con una cavità ricoperta di nerofumo.

Se N è il numero di elettroni liberati al catodo, la probabilità che il fenomeno sia rivelato è

$$P = 1 - e^{-N} \cong N$$

per N piccolo.

Nelle nostre condizioni sperimentali, P è minore di 1 come risulta confrontando la frequenza calcolata (6 coinc/h) con quella osservata nel telescopio ed è quindi possibile avere indicazioni sul numero di quanti emessi dalla frequenza degli impulsi.

I risultati sono esposti in fig. 3, dove sono riportate in ascissa l'altezza dell'impulso ed in ordinata le frequenze corrette dal fondo proprio del fotomoltiplicatore. In tab. I sono riportati i valori delle frequenze osservate per impulsi di ogni altezza.

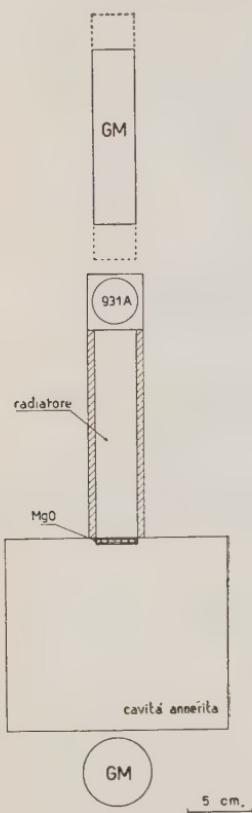


Fig. 2.

TABELLA I.

	Plexiglas	Acqua
Ossido di Magnesio	$4,00 \pm 0,18$	$2,00 \pm 0,15$
Cavità annerita	$1,30 \pm 0,12$	$0,45 \pm 0,08$

Ammettiamo che l'effetto osservato con la cavità nera sia dovuto alla luce di fluorescenza e precisamente a quella parte che viene emessa nel semispazio posteriore. Quando alla cavità nera si sostituisce la superficie di MgO anche la luce di fluorescenza emessa nel semispazio anteriore contribuirà all'effetto. Se si attribuiscono i valori 1 e 0,2 rispettivamente ai coefficienti di assorbimento della cavità nera e dell' MgO e si ammette che quest'ultimo diffonda perfettamente, si ottiene il valore 1,8 per il rapporto degli effetti nei due casi. Saranno allora $1,8 \cdot 1,3 = 2,34$ e $1,8 \cdot 0,45 = 0,81$ i contributi della fluorescenza e $4 - 2,34 = 1,66 \pm 0,25$ e $2 - 0,81 = 1,19 \pm 0,20$ quelli dell'effetto Cerenkov nel plexiglas e nell'acqua. Il rapporto di questi ultimi valori $1,39 \pm 0,30$ è in generico accordo col valore 1,3 che si calcola mediante (2).

Risulta quindi che nel plexiglas il flusso luminoso emesso per fluorescenza è dello stesso ordine di grandezza di quello emesso per effetto Cerenkov; nel-

L'acqua da noi usata (distillata senza speciali accorgimenti e contenuta in recipiente di ottone argentato) la fluorescenza è pure apprezzabile. I valori da noi dedotti per la fluorescenza rappresentano comunque un limite superiore

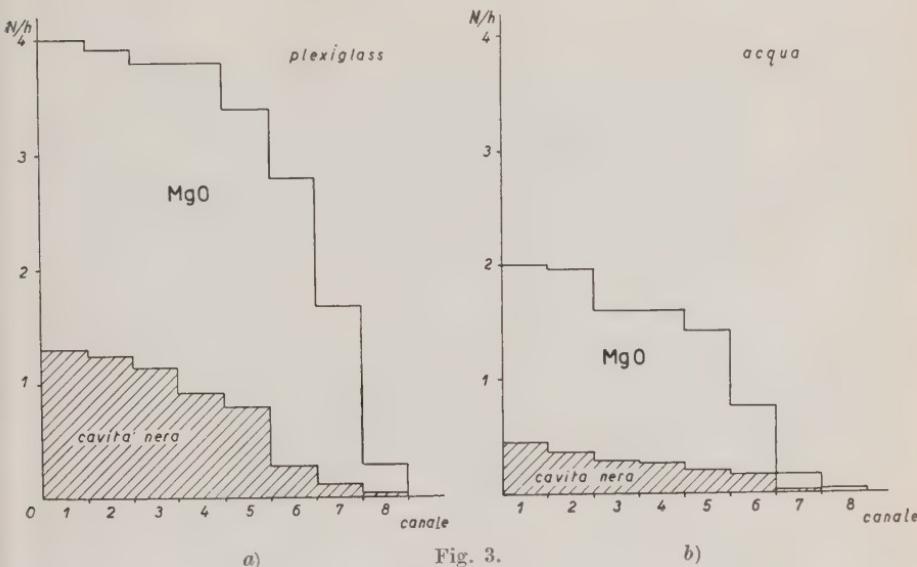


Fig. 3.

per l'ipotesi fatta che il potere assorbente della cavità nera sia completo. Sebbene il plexiglas sia sotto molti aspetti indicato come radiatore per la rivelazione dell'effetto Cerenkov, ci sono misure, come quelle di energia, per le quali può essere preferibile l'acqua adeguatamente purificata.

Ringraziamo il prof. A. ROSTAGNI per utili discussioni e il dott. C. MANDUCHI per l'aiuto prestato nelle misure.

S U M M A R Y (*)

Authors report a measurement of the dependence from the refractive index of the radiated Cerenkov energy. A fluorescence in plexiglass and water was observed which is comparable to the Cerenkov effect.

(*) Editor's translation.

On the Operation of the Diffusion Cloud Chamber.

C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI

Istituto di Scienze Fisiche dell'Università - Milano

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare del C.N.R. - Sezione di Milano

(ricevuto il 15 Settembre 1952)

Summary. — An experimental model of downward diffusion cloud chamber has been constructed, and the performance of the instrument investigated. Satisfactory ion tracks were easily obtained, and chamber operation showed lasting over considerable periods of time, when some care is devoted to maintain the most suitable boundary conditions. The effect of ion load on the depth of the sensitive layer is deduced by tracing plots of supersaturation distribution. Remarks advising a convenient choice of chamber gas and vapour are finally appended.

Introduction.

Several years after the pioneering work of LANGSDORF⁽¹⁾, the problem of obtaining cloud chambers that are continuously sensitive to ionizing radiation has been re-examined both from an experimental⁽²⁻⁶⁾ and a theoretical⁽⁷⁾ point of view. Simplified design in comparison with LANGSDORF's apparatus, and better understanding of the factors influencing the operating conditions, allowed the recent authors to emphasize the potentialities of the vapour diffusion cloud chamber.

As we became aware of the promising results of NEEDELS and NIELSEN⁽²⁾

⁽¹⁾ A. LANGSDORF jr.: *Rev. Sci. Inst.*, **10**, 91 (1939).

⁽²⁾ T. S. NEEDELS and C. E. NIELSEN: *Rev. Sci. Inst.*, **21**, 976 (1950).

⁽³⁾ E. W. COWAN: *Rev. Sci. Inst.*, **21**, 991 (1950).

⁽⁴⁾ D. H. MILLER, E. C. FOWLER and R. P. SHUTT: *Rev. Sci. Inst.*, **22**, 280 (1951).

⁽⁵⁾ C. E. NIELSEN, T. S. NEEDELS and O. H. WEDDLE: *Rev. Sci. Inst.*, **22**, 673 (1951).

⁽⁶⁾ A. J. BARNARD and J. R. ATKINSON: *Nature*, **169**, 170 (1952).

⁽⁷⁾ R. P. SHUTT: *Rev. Sci. Inst.*, **22**, 730 (1951).

and of COWAN⁽³⁾, we assembled a very simple experimental unit making use of downward vapour diffusion. Our purpose was primarily to check the stability of operation of the apparatus, and its reliability as a radiation detecting device. In this paper our experience with the diffusion cloud chamber will be summarized.

Principle of operation.

It is well known that if a sufficient temperature gradient is maintained between two surfaces, and vapour diffusion through an inert gas is secured from the hot surface to the cold one, a region that remains continuously supersaturated may be obtained. To the effect that in this region condensation takes place on ions, suitable temperatures of the two surfaces must be chosen. The possibility of getting the required supersaturation is then understood by considering a plot of the supersaturation *vs.* temperature distribution: provided the vapour is saturated at the bounding hot and cold surfaces, the graph shows a large departure from linearity which ensures that fairly high values of supersaturation can be reached⁽⁸⁾.

Once a region sensitive to ionizing radiation is allowed within the chamber, the usefulness of the instrument for practical purposes depends mostly upon its ability to show tracks along particle-paths well distinguishable against the background fog. Experimental work so far reported points out that this result is conveniently achieved by supplying an electrostatic sweeping field to prevent the building up of exceeding ionic densities, and by taking care of avoiding that the gas or vapour should be contaminated with common condensation nuclei effective at low supersaturation values.

Construction of the experimental chamber.

The chamber is of almost conventional design (fig. 1). The bottom of the chamber is a square aluminium plate (32 cm side \times 8 cm thickness), blackened by an anodizing process. This bottom is cooled by a block of dry ice that is pressed against it by a spring supported plate. The lateral walls are made by four 24 \times 24 cm² glass panes, matched and cemented together at the edges to form a cubic box. The top cover of the chamber is obtained from a brass

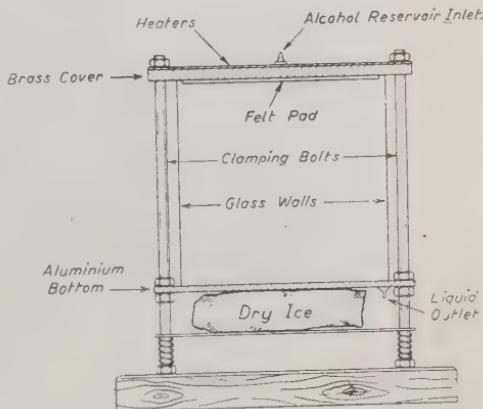


Fig. 1. — Schematic diagram of the diffusion cloud chamber.

⁽⁸⁾ J. G. WILSON: *The principles of cloud-chamber technique* (Cambridge, 1951), p. 49.

plate of 1 cm thickness, and includes in the center a reservoir of some cubic centimeters capacity. The alcohol therein contained falls down on a double-layer felt pad that is fastened at the underside of the top cover by a brass frame. The two felt layers are separated by an horizontal aluminium disk of 12 cm diameter, whose center is located under the exit hole of the alcohol



Fig. 2. — Diffusion chamber with camera mounted above.

reservoir; a satisfactory uniform distribution of the alcohol over the felt layers is thus obtained. The heating of the top cover is effected by four a.c. energized coils, covered with mica foils and placed directly upon the brass plate. The whole chamber is assembled by means of four bakelite columns, the glass walls being separated from the top cover as well as from the bottom with rubber gaskets.

This chamber is apt to be photographed from side. A different top cover was afterwards designed, that enables photographing from above (fig. 2). Again a 1 cm thick brass plate is used, with an opening of $14 \times 14 \text{ cm}^2$ through;

the plate is then sourmounted by a gas-tight pyramidal brass shield terminated at 30 cm height with a small glass window. This time the alcohol stays in a gutter resting on the upperside of the brass plate and surrounding its opening; ceramic resistors plunged into the alcohol provide the heating required.

With the same covers and bottom, a lesser chamber depth was also tested, by utilizing for the walls glass panes of 24×16 cm². In the following we shall refer to our diffusion chamber no matter what top cover or side-wall height was actually used, as the behaviour of the instrument showed substantially unchanged.

Comments on the operating conditions.

Using methyl alcohol vapour diffusing in air at atmospheric pressure, the conditions of the chamber being sensitive to ionizing radiation were easily met. At once it may also be said that the general features of the instrument operation, as referred to by preceding authors (^{2, 3, 5, 6}), could be refound without especial difficulty, thus confirming the promptness and reliability of the device.

The deepest sensitive layer consistent with good track quality was ≈ 5 cm, the boundary temperatures being about -55 and $+20$ °C. Several arrangements of the electric clearing field were tried in order to improve the collection of background ions. An arrangement that worked quite satisfactorily was as follows. Two bakelite frames, each supporting a series of .1 mm constantan wires, were suspended horizontally into the chamber: the lower frame close above the sensitive layer, and the upper one some five centimeters higher. The wires near the sensitive region, the bottom and the top chamber plates were at the same potential, *viz.* at ground potential; the wires of the other frame were at a negative potential of several hundred volts. This sweeping electrodes arrangement has the peculiarity of reducing the diffusion of ions from above into the sensitive volume, without impairing the quality of the tracks therein formed. It is thus possible to have the electric field working uninterruptedly; however, the present form of field electrodes is clearly unsuitable but for side observation of the chamber. Among other clearing field arrangements acting in the sensitive volume also, the most convenient, on account at least of its simplicity, was found to be the conventional field between the top and the bottom of the chamber: in this case the applied voltage had obviously to be removed before photographing.

If all the background droplets can be accounted for in terms of condensation on ions originating anywhere within the chamber by cosmic rays or radioactive contamination, sweeping fields of proper design should suffice to improve both formation and visibility of the tracks. It must be emphasized, however, that while such fields help in any case to maintain the best working condition, they have of course no effect on uncharged condensation nuclei. Information about the presence and nature of these nuclei would therefore be desired; and to this purpose we will examine the onset of condensation in the chamber volume above the shallow layer where tracks of ionizing particles are seen.

As a matter of fact, it has been observed since studying the performance of diffusion chambers that dropwise condensation may take place also in the upper chamber regions, thus originating a rain that in falling down across

the sensitive volume increases the background noise. Moreover these droplets, while growing in the top chamber part, subtract vapour near the source and may eventually succeed in reducing the amount of vapour diffusing towards the lower chamber part to such an extent that this region becomes insufficiently supersaturated for track formation. Referring to the appearance of this rainfall, the observations so far reported led some authors to quite different opinions about the origin and importance of the phenomenon. Thus LANGSDORF (¹) laid stress on the requirement of securing that the vapour diffusing from the hot surface be itself free from condensation nuclei—a condition that he deemed hard to satisfy; while COWAN (²) claimed on a possible splitting of the sensitive volume into two layers as the temperature of the roof exceeds some critical value, the presence of ions in the upper layer being then responsible for the rainfall. Like COWAN, also NIELSEN *et al.* (³) found no evidence of condensation nuclei arising from contact of vapour with any cold surface (or of liquid with a heated metal surface), again at variance with LANGSDORF's speculation; they however did not mention any layer splitting, nor was a similar effect confirmed by others (^{4, 6}).

In accounting for the rainfall, it is undoubtedly that there may be, first of all, trivial condensation agents, such as nuclei introduced by entry of room air through leaks, or perhaps originated by continuous irradiation with light sources. Also, it is known that when the temperature of the liquid supply reaches the boiling point, a conspicuous rain invades the chamber. Nevertheless, these troubles can be avoided, as they are only a consequence of an incorrect chamber operation.

However, we observed that the greatest care in excluding spurious effects, like the ones referred to above, still does not prevent the onset of a certain amount of rain. The density of droplets now forming in the upper chamber region is found to depend primarily on the absolute temperature of the roof, and to increase rather steeply therewith. We were not able to show any definite effect of electric sweep fields acting across the region where droplets are growing, even when fields as intense as ≈ 500 V/cm were applied. Thus we are induced to attribute these droplets, for the greatest part, to a non ionic origin. Unfortunately, a reliable discussion about the nature of the uncharged condensation nuclei here concerned cannot be attempted before many factors as yet rather uncertain are investigated more quantitatively (*e.g.*, a knowledge of the supersaturation distribution in the actual working conditions would be needed). It would also be rash attempting by this time to evaluate the contribution of this non-ionic fog to the total condensation: one must remember, at least, that for a given vapour flux through the chamber the condensation on uncharged nuclei may be an occurrence not independent from the existing ion load.

For the moment we shall limit ourselves to point out the following:

- (i) uncharged nuclei are likely present and contributing to the background fog;
- (ii) the assumptions that the vapour introduced into the chamber carries condensation nuclei, and/or that nuclei arise from metal surfaces, are not supported, though at present the intervention of these agents cannot be excluded;
- (iii) to reduce the background drop density, it is expedient to operate the chamber at fairly low roof temperature (in our chamber, temperatures between 15 and 30 °C were found very satisfactory).



Fig. 3. — Burst of ionization produced by an X-ray beam. X-ray tube peak voltage, 40 kV; duration of the beam, less than 0.2 s; delay of the photograph, ~ 1 s.

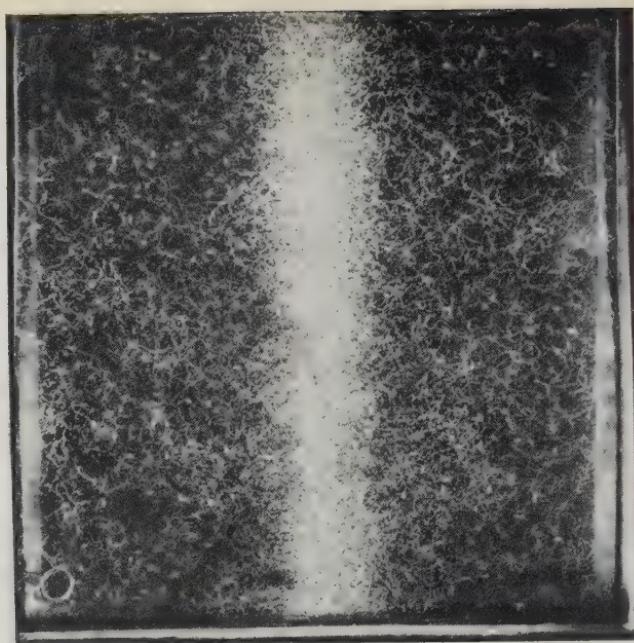


Fig. 4. — Showing the chamber after heavy exposure to X-rays;
other conditions as in fig. 3.

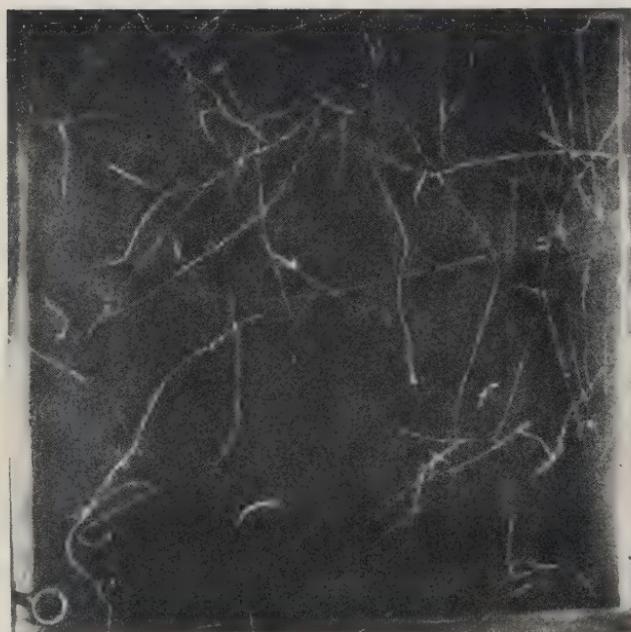


Fig. 5. — Sharp electron tracks; the chamber was irradiated
by an outer radioactive source.

The most plausible hypothesis about the nature of these nuclei seems meanwhile the assumption of statistical clustering of vapour molecules to form uncharged aggregates, that grow to drop size provided the supersaturation attains the necessary value. Obviously, formation of nuclei by clustering should take place also inside the sensitive volume, so that the actual background of non-ionic fog in the radiation detecting layer will result from rain falling through and from droplets locally formed. To conclude, it may be worth noticing that there is qualitative agreement between our experience and a theoretical anticipation by SHUTT⁽⁷⁾ showing that the number of the above mentioned uncharged drops should be strongly temperature dependent.

Finally, figs. 3, 4, and 5 are reported to demonstrate the response of our chamber to ionizing radiations. The sensitive layer was photographed from above using a Leica camera with Leitz « Elmar » $f = 50$ mm objective and additional lens N°. 1.

Effect of ion load on supersaturation distribution.

While investigating the performance of the diffusion chamber, it became evident the usefulness of knowing, at least in rough approximation, the values to be expected for the supersaturation at different heights above chamber bottom. A first approach to this problem was made already by LANGSDORF⁽¹⁾; but as he did not take into account the effect of the condensation of vapour on the ionic nuclei, the curves reported in his paper may be rather far from representing the true supersaturation distribution. A comprehensive theory of diffusion chambers, that has been published recently by SHUTT⁽⁷⁾, should nowadays enable anticipating chamber response for a wide variety of imposed boundary conditions. With the more limited purpose of individuating the best working conditions in the practical instance of a chamber like ours, we had tried to extend LANGSDORF's work by considering the effect of condensation. We will outline briefly our procedure, and give the numerical results.

Following LANGSDORF, and under his simplifying assumptions, the expression of the total energy flux f through the chamber is given by

$$(1) \quad f = c_1 C_p t - K dt/dz,$$

where

c_1	vapour flux,
C_p	specific heat of the vapour,
$K = K_0(1 + at)$	heat conductivity of the gas-vapour mixture, assumed linearly varying with the temperature t ,
$t = T - T_0$	temperature, defined as difference between the temperatures in absolute degrees at some height within the chamber (T) and on the floor (T_0),
dt/dz	temperature gradient along the z -axis, and
z	height above chamber floor.

Eq. (1) is easily integrated, after introducing the parameter $r = f/cC_p t_1$, and yields a relation between z and t

$$(2) \quad z = h \frac{at + (1 + art_1) \ln(1 - t/rt_1)}{at_1 + (1 + art_1) \ln(1 - 1/r)},$$

where h is the distance of chamber roof from the floor, and $t_1 = T_1 - T_0$ the difference between the respective temperatures.

Then, the distribution of vapour has been calculated by LANGSDORF by extending KUUSINEN's isothermal diffusion equations ⁽⁹⁾. The procedure finally gives the supersaturation $S(t)$ in the approximate form

$$(3) \quad S(t) = P_0(1 - P_s(t)/P_s(0))/P_s(t),$$

with

P_0 standing for

total pressure within the chamber,

$P_s(t)$

saturation pressure of the vapour at temperature t , and

$P_s(0)$

partial pressure of the gas at temperature t .

Equations (2) and (3) allow to obtain $S_r(z)$, the supersaturation as a function of z . We report in fig. 6 some $S_r(z)$ -curves calculated for a few values of the parameter r : the assumed chamber operating conditions are indicated in the caption of the figure.

Now, we will try to get a plot of $S(z)$ taking into account the effect of condensation on ionic nuclei. Let us suppose that the radius R of a droplet grows as the square root of the time, as assumed when dealing with *expansion chambers* ⁽¹⁰⁾. Suppose also that they are falling down with practically constant velocity v . Introducing a convenient coefficient, e , we have

$$(4) \quad R^2 = e(z_1 - z)/v,$$

z_1 being the height of the upper boundary plane of the sensitive volume. If all the ions entering this volume can be regarded as coming from above (this hypothesis seems fairly justified with the geometry of the chamber) the mass of a droplet at the height $z (< z_1)$ will be

$$(5) \quad m = 4/3\pi\varrho(t)(e/v)^{3/2}(z_1 - z)^{3/2},$$

where $\varrho(t)$ stands for the density of the liquid drop.

The expression of the total energy flux through a plane individuated by the coordinate $z (< z_1)$ can now be re-written, in first approximation, including a term $Q(z)$ to represent the heat of condensation released per unit time in forming the droplets

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta z = h - z_1, \\ \Delta t = t_1 - t_{(z=z_1)}. \end{array} \right.$$

$$c_1 C_p t_{(z=z_1)} - K \Delta t / \Delta z + Q(z)$$

⁽⁹⁾ K. KUUSINEN: *Ann. der Phys.*, **24**, 445 and 447 (1935).

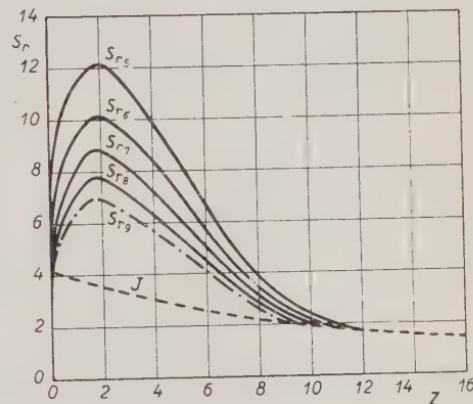
By equating the above quantity to the sum of the energy carried on chamber floor by the droplets ($Q_g(z)$), plus the ones transported by vapour convection ($Q_{c_1}(z)$), and by conduction ($-K dt/dz$, cf. Eq. (1)), we get

$$c_1 C_p t_{(z=z_1)} - K \Delta t / \Delta z + Q(z) = Q_g(z) + Q_{c_1}(z) - K dt/dz,$$

or, in more explicit form,

$$(6) \quad c_1 C_p t_{(z=z_1)} - K \Delta t / \Delta z + m \lambda_t N = m t_g(z) C_e N + (c_1 - m N) t C_p - K dt/dz,$$

Fig. 6. — Plots of supersaturation in absence of condensation. The curves S_r are calculated for a chamber of 16 cm height, with boundary temperatures $T_0 = 223$ and $T_1 = 293$ absolute degrees, and methyl alcohol diffusing in atmospheric air. Numerical values of physical constants are taken, here as well as for the curves reported in figs. 7 and 8, from LANDOLT-BÖRNSTEIN's: *Physikalisch-Chemische Tabellen*. Only the curve calculated for $r = 5$ represents a distribution corresponding to the true vapour flux with the given boundary temperatures and assuming $S_r(z = h) = 1$; other curves refer, under the same conditions, to a flux lesser than the allowed one. Dot-dashed curve $S_{r=9}$ is obtained by extrapolation. Curve J is an approximative ion condensation limit.



where the work of the surface tensions was neglected since small in comparison with the other terms. The symbols yet unexplained are defined thus:

- N number of ions crossing per unit time a cm^2 of the plane $z = z_1$,
- λ_t latent heat of condensation of the vapour,
- C_e specific heat of the liquid drops, and
- $t_g(z)$ temperature of the drops at z .

Graphical integration of Eq. (6) gives typical plots of temperature distribution, depending on the value chosen for N , as shown in fig. 7. Moreover, the vapour flux distribution (for $z < z_1$) is plainly given by the expression between brackets in Eq. (6), namely

$$(7) \quad c_1^* = c_1 - \frac{4}{3} \pi \varrho(t) (e/v)^{3/2} (z_1 - z)^{3/2} N.$$

(10) See reference (8), p. 15.

Now it must be noticed that at an arbitrary point inside the chamber the supersaturation depends in practice only on temperature and vapour flux. Therefore, to get the actual supersaturation at a given height z' , one can trace the curve of supersaturation *vs.* temperature in absence of condensation, assuming

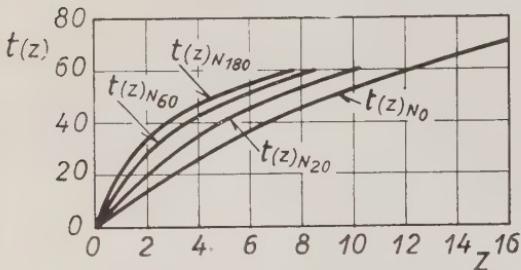


Fig. 7.

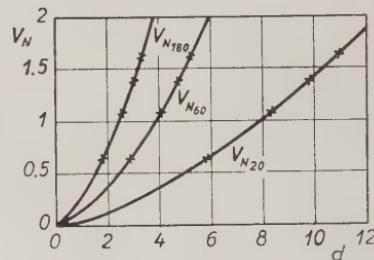


Fig. 8.

Fig. 7. – Plots of temperature distribution. Curve $T_{N=0}$ represents the distribution in absence of condensation: a unique curve was traced averaging the r -parameter values considered in fig. 6, because $T_{N=0}$ is not very sensitive to changes of r within its present limits. Other curves give temperature distribution when 20, 60, or 180 ions/cm²/s enter the sensitive volume.

Fig. 8. – Amount of condensed vapour V_N (g/cm²/s) *vs.* the distance d (cm) from the upper bounding plane of the sensitive volume. Points marked by a cross individuate the heights where the vapour flux fits in with the r -parameter values considered in fig. 6.

the vapour flux to be $c_1^*(z')$; and then read on this curve the supersaturation corresponding to the proper value of temperature, $t(z')$. Iterating the procedure for various c_1 as determined by sets of z_1^* and N -values, will allow to deduce the whole family of supersaturation curves.

Practically, the graphs of figs. 6 and 7, together with the ones of fig. 8 representing the amount of condensed vapour *vs.* the distance from the plane $z = z_1$, were utilized to get the values S_N of the supersaturation when N ions/cm²/s enter the sensitive layer. A numerical example of the graphical plotting of S_N is given below.

Suppose we wish to know a point of the $S_{N=20}$ -curve. Then note that the curves of fig. 8 allow to individuate the heights where the vapour flux c_1^* fits in with the r -parameters used in tracing the S_r -curves of fig. 6. Thus one can see, for example, that the height, where the vapour flux on the $V_{N=20}$ -curve of fig. 8 has to have the same value as in the $S_{r=8}$ -curve of fig. 6, is $z = 9.8$ cm. From fig. 7 ($T_{N=20}$ -curve), to $z = 9.8$ cm corresponds a $t = 58$ degrees; and accordingly one reads, on $T_{N=0}$, $z = 11.5$ cm. Now, with this z -value one comes back to fig. 6, and finds on the $S_{r=8}$ -curve

$$S_{r=8}(z = 11.5) = 1.5 = S_{N=20}(z = 9.8).$$

Fig. 9 reports some representative supersaturation distribution plots. The curve labelled J represents the ion condensation limit; its intersections with

the S_N -curves determine, obviously, the excepted thicknesses of the sensitive layers.

Conclusive remarks.

The information plotted in figs. 7 and 9, though resulting from very crude approximations (*e.g.*, side wall effects were neglected; dropwise condensation other than on ionic nuclei was overlooked, etc.), agrees on the whole with our experimental findings. Thus we may attempt to conclude the speculation of the preceding section by adding a few comments.

(i) The maximum permissible thickness of sensitive volume is reduced by increasing the ion load. Therefore a shallow chamber is likely supplying a sensitive volume relatively thicker than a deep one, since the number of diffusing ions should be anyway lower in the former instance.

(ii) Sensitive layers of moderate thickness in comparison with chamber depth should provide more stable operation: the relative changes in background condensation are then less important, and the height of the layer is expected to remain practically constant.

(iii) *Ceteris paribus*, the amount of flowing vapour determines the thickness of sensitive layer: for instance, if the rate of droplets growth is large, the vapour flux becomes rapidly scanty, and the height of the layer decreases. Hence it is advantageous to employ vapour supplied from liquids having high surface tension; and the use of mixtures to improve layer depth is quite understandable.

(iv) Choosing liquids with low condensation heat and gases with high thermal conductivity is also recommended, because the amount of heat released is lessened, and its flow towards the floor sped up. Thus the temperature is affected to a little extent by condensation, and the supersaturation stays large enough to ensure sensitive layers satisfactorily thick. The effect of great conductivity is however of lesser importance than the one deriving from low condensation heat: in fact, it is obvious that when the gas conductivity is high, the quantity of heat propagated by conduction from roof to floor is also enhanced.

(v) When employing a shallow chamber, one would conveniently keep the roof at a fairly low temperature, in order that the heat transported by conduction be not exceeding. To maintain the desired vapour flux in spite of the reduced roof temperature, it might be useful adopting a vapour of high

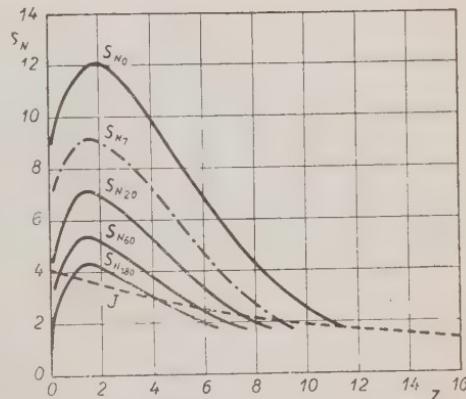


Fig. 9. - Supersaturation distributions taking into account condensation on ions. Dot-dashed curve $S_{N=7}$ is obtained by interpolation. Curve J represents again the ion condensation limit.

molecular diffusibility. An increase in the rate of downward diffusion could also be obtained by the use of a vapour relatively heavy in comparison with the gas. Emphasis, however, has to be laid on the fact that the necessity of securing a diffusing state stable against gravity puts severe limitations to the choice of chamber gas and vapour.

Acknowledgements.

The authors wish to thank professor G. POLVANI for his continued interest and for several stimulating conversations. They also wish to thank Mr. B. CORETTI for valuable assistance, and the *Gruppo degli Amici dell'Istituto di Scienze Fisiche* for financial support.

RIASSUNTO

Viene descritto un modello sperimentale di camera a diffusione, che è stato utilizzato per studiare le prestazioni dello strumento quale rivelatore continuamente sensibile di particelle ionizzanti. Si stabiliscono le condizioni di corretto funzionamento dell'apparecchio, e si mostra, riportando alcune fotografie ottenute, la qualità della risposta che ci si può attendere presentemente da una camera a diffusione. Vengono quindi calcolati, tenendo conto del fenomeno della condensazione di vapore sui nuclei ionici, i valori della soprassaturazione a diverse altezze dal fondo della camera. I risultati sono nel complesso in accordo con le osservazioni sperimentali, e permettono di dedurre la dipendenza dello spessore dello strato sensibile dal carico ionico.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Relation between Even and Odd Couplings in Beta-Decay Theory.

S. FERRONI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 29 Settembre 1952)

In the standard theory of beta-decay the interaction Hamiltonian is generally assumed to be some linear combination of the five « pure » interactions:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\mathrm{S}): & I = \langle a\gamma^4 c \rangle \langle b\gamma^4 d \rangle, \\ (\mathrm{P}): & I' = \langle a i \gamma^4 \gamma^5 c \rangle \langle b i \gamma^4 \gamma^5 d \rangle, \\ (\mathrm{T}): & I'' = \langle a i \gamma^k \gamma^5 c \rangle \langle b i \gamma^k \gamma^5 d \rangle - \langle a \gamma^k c \rangle \langle b \gamma^k d \rangle, \\ (\mathrm{V}): & I_1 = \langle a i \gamma^4 \gamma^k c \rangle \langle b i \gamma^4 \gamma^k d \rangle - \langle a l e \rangle \langle b l d \rangle, \\ (\mathrm{A}): & I'_1 = \langle a i \gamma^4 \gamma^k \gamma^5 c \rangle \langle b i \gamma^4 \gamma^k \gamma^5 d \rangle - \langle a \gamma^5 c \rangle \langle b \gamma^5 d \rangle. \end{array} \right.$$

Recent studies on the problem of the universal Fermi interaction ⁽¹⁾ seem, however, to favor the alternative choice of the following as fundamental couplings:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} J = \langle a\gamma^4 c \rangle \langle b i \gamma^4 \gamma^5 d \rangle, \\ J' = \langle a i \gamma^4 \gamma^5 c \rangle \langle b \gamma^4 d \rangle, \\ J'' = \langle a i \gamma^k \gamma^5 c \rangle \langle b \gamma^k d \rangle + \langle a \gamma^k c \rangle \langle b i \gamma^k \gamma^5 d \rangle, \\ J_1 = \langle a i \gamma^4 \gamma^5 c \rangle \langle b i \gamma^4 \gamma^k \gamma^5 d \rangle - \langle a l e \rangle \langle b \gamma^5 d \rangle, \\ J'_1 = \langle a i \gamma^4 \gamma^k \gamma^5 c \rangle \langle b i \gamma^4 \gamma^k d \rangle - \langle a \gamma^5 c \rangle \langle b l d \rangle. \end{array} \right.$$

Following CAIANIELLO, we name even and odd respectively the couplings listed under (1) and (2); our notation is chosen so to adhere as closely as possible to that of ref. ⁽¹⁾, for purposes of comparison.

We study here the relations existing between even and odd couplings, with a view, in particular, to solving the problem of reducing a calculation based on a general odd Hamiltonian

$$(3) \quad H_{\text{odd}} = gJ + g'J' + g''J'' + g_1J_1 + g'_1J'_1,$$

⁽¹⁾ E. R. CAIANIELLO: *Nuovo Cimento*, **10**, 749 (1951).

to one of standard type depending upon a suitable even Hamiltonian

$$(4) \quad H_{\text{even}} = fI + f'T + f''T'' + f_1I_1 + f'_1I'_1.$$

our considerations are limited to the only case of concrete interest, i.e. that of beta-decay of nucleons, and are strictly valid under the assumption (adhered to here throughout) that the neutrino mass is exactly zero. With these limitations, it is clear that the substitution $\psi_\nu \rightarrow i\gamma^5\psi_\nu$, performed in (4) reduces (4) to a linear combination of odd couplings, while leaving unchanged all numerical results obtainable therefrom (at least, if neutrino spins are summed upon). Let us define vectors $\mathbf{J} = \{J, J', J'', J_1, J'_1\}$, $\mathbf{g} = \{g, g', g'', g_1, g'_1\}$, \mathbf{I}, \mathbf{f} , and denote with \mathbf{I}' what become, of \mathbf{I} after the substitution $\psi_\nu \rightarrow i\gamma^5\psi_\nu$; a_1, a_2, a_3, a_4 will be used indifferently, whenever convenient, in place of a, b, c, d .

We get

$$\mathbf{I}' = O_k \mathbf{J}, \quad (v \equiv a_k),$$

where the subscript k specifies which field in \mathbf{I} is the neutrino field. Explicitly:

$$0_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}; \quad 0_b = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & & & & 0 \\ 0 & -1 & & & \\ & & -i & & \\ & & & -i & \end{pmatrix}; \quad 0_c = \bar{0}_a; \quad 0_d = \bar{0}_b.$$

It follows:

$$(5) \quad H_{\text{odd}} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{g} \cdot 0_k^{-1} \mathbf{I}' = \mathbf{f} \cdot \mathbf{I}',$$

and (5) can be substituted for all computational purposes with $H_{\text{even}} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{I}$, as was remarked before, provided

$$(6) \quad \mathbf{f} = [0_k^{-1}]^* \mathbf{g} = \bar{0}_k \mathbf{g},$$

(6) is especially useful when interference terms play a role; all standard results known for even couplings become by its use immediately available for odd couplings without further work.

The complete picture of the algebraic properties of odd couplings is gathered by studying their transformation properties under the permutation group of a, b, c, d . These differ sharply from those pertaining to even couplings; we shall content ourselves here with deriving the basic relations which connect the transformation laws of odd to those of even couplings. It suffices to consider only transpositions $T_{a_i a_k}$; let $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ denote $T_{a_1 a_k}$, $(a_1 a_2 a_3 a_4)$; then considering H_{odd} written in the order $a_1 a_2 a_3 a_4$, and denoting with $(a_i a_k)$, $[a_i a_k]$ respectively the matrices representing $T_{a_i a_k}$ when operating on \mathbf{J} , \mathbf{I} respectively, we get:

$$\begin{aligned} H_{\text{odd}} &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{J}(a_1 a_2 a_3 a_4) = \mathbf{g} \cdot (a_i a_k) \mathbf{J}(a_1 a_2 a_3 a_4) = \\ &= \mathbf{g} \cdot 0_{i'}^{-1} \mathbf{I}'(a_1 a_2 a_3 a_4) = \mathbf{g} \cdot 0_{i'}^{-1} [a_i a_k] \mathbf{I}'(a_1 a_2 a_3 a_4), \end{aligned}$$

whence:

$$[a_i a_k] = 0_l (a_i a_k) 0_l^{-1},$$

any l , where $l' = l$ if $l \neq i, k$; $l' = i$ if $l = k$; $l' = k$ if $l = i$ ($a_l = v$).

Actual computation made using formulae (14) of ref. (1), yields:

$$[ac] = [bd] = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}; \quad [ab] = [cd] = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 3/2 & -3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix};$$

$$[ad] = [bc] = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -3/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

in perfect agreement with the results of FIERZ (2) and MICHEL (3). These relations exhibit clearly, when compared to formulae (14) of ref. (1), the basic structural differences between even and odd couplings: in particular, they prove the inequivalence of the **J** and **I** representations of the permutation group.

I beg prof. E. CAIANIELLO to accept my best thanks for his useful discussions on the matter.

(2) M. FIERZ: *Zeits. f. Phys.*, **104**, 553 (1937).

(3) L. MICHEL: *Proc. Phys. Soc.*, **63 A**, 514 (1950).

Coincidence investigation of the γ spectrum from $^{214}_{83}\text{Bi}$ (RaC).

F. DEMICHELIS and R. MALVANO

Istituto di Fisica del Politecnico - Torino

(ricevuto il 27 Settembre 1952)

Among the elements of the $^{226}_{88}\text{Ra}$ serie, $^{214}_{83}\text{Bi}$ (RaC) ($T = 19,7$ min) presents a very complicated decay scheme.

In the various papers on this subject⁽¹⁾ it appears that in the decaying of $^{214}_{83}\text{Bi}$, many γ rays with energy from 0,6 to 2,4 MeV are emitted with different probabilities.

Many schemes have been proposed in order to describe the different energy levels of $^{214}_{84}\text{Po}$, which arises with 99,96 ratio as a β decay product of $^{214}_{83}\text{Bi}$, but these schemes are not completely satisfactory⁽²⁾. From them it would appear that for each excited state of $^{214}_{84}\text{Po}$ there would be a transition to the ground state with the emission of only one γ ray.

Owing to the complexity of the γ spectrum and the existence of some very hard γ rays (table I), it may be interesting to find out if there are or not one or more

cascades, i.e. if the transition from an excited to the ground state takes place through an intermediate state with very short mean life time ($< 10^{-8}$ s) and which

TABLE I.

Transition	Average quanta per α ray of Ra	$h\nu$ (MeV)
Ra \rightarrow Rn	0,012	0,184
RaB \rightarrow RaC	0,115	0,241
	0,258	0,294
	0,450	0,350
RaC \rightarrow RaC'	0,658	0,607
	0,065	0,706
	0,067	0,933
	0,206	1,120
	0,063	1,238
	0,064	1,379
	0,258	1,761
	0,074	2,198

γ rays of the spectrum could give rise to such a cascade.

A preliminary study of this problem has been undertaken using an experimental set up whose block diagram is indicated in fig. 1. The scintillation counters D_1

(¹) C. D. ELLIS and G. H. ASTON: *Proc. Roy. Soc., A* **129**, 180 (1930); G. D. LATYSHEV: *Rev. Mod. Phys.*, **19**, 132 (1947); R. D. EVANS: *Nucleonics*, **1**, **2**, 32 (1947); M. MLADENOVIC, A. HEDGRAM: *Proceedings of the Conference on β and γ Radioactivity* (Amsterdam, 1952); not yet published.

(²) S. NISHIDA: *Phys. Rev.*, **51**, 996 (1937); A. H. WAPSTRA: *Proceedings of the Conference on β and γ Radioactivity* (Amsterdam, 1952); not yet published.

TABLE II.

Thickness of absorber in g/cm ²	A 0,565	0,565	5,65	0,565	5,65	11,3
Random Coincidences per min	25,80 $\pm 0,50$	13,15 $\pm 0,45$	7,00 $\pm 0,25$	9,25 $\pm 0,20$	4,40 $\pm 0,15$	2,95 $\pm 0,10$
Total Coincidences per min	38,00 $\pm 0,70$	21,20 $\pm 0,55$	11,50 $\pm 0,30$	13,50 $\pm 0,30$	7,50 $\pm 0,20$	4,80 $\pm 0,15$
Effective Coincidences per min	12,20 $\pm 1,20$	8,05 $\pm 1,05$	4,50 $\pm 0,55$	4,35 $\pm 0,50$	3,10 $\pm 0,35$	1,85 $\pm 0,25$

and D_2 consist of 931A photomultipliers and of Tl-active NaI crystals. The coincidence circuit has a resolving time whose value is of the order of $0,75 \cdot 10^{-7}$ s.

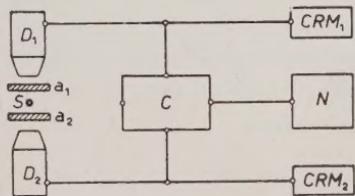


Fig. 1

- C = Coincidence circuit.
- CRM = Counting rate meter.
- D = Radiation Detector.
- S = Radioactive Source.
- a = Pb absorber.

The counting rate meters (C.R.M.) measure the rate of the incoming radiations detected by the crystal counters.

The number of coincidence per unit time when the two receivers and the radioactive sources (old samples of radium) are far from each other, is less than the number of coincidences per unit time when the two receivers and only one source are settled as in fig. 1, the rate of the incoming radiations being the same.

The measurements have been made

with various thicknesses of Pb absorber between the source and the receivers. In table II we report our experimental results.

From this table and from the research in general we may draw the following conclusions:

- 1) at least one cascade of γ rays exists;
- 2) assuming the existence of only one cascade of sufficient intensity to be detected, from the values of the coincidences with various absorber thicknesses

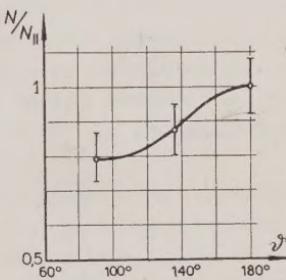


Fig. 2.

we may determine the order of magnitude of both γ ray energies giving rise to the cascade; they are 0,7 and 1,3 MeV respectively with $\approx 20\%$ incertitude.

It is known that, if we are dealing

with a cascade, an anisotropy in the angular distribution of the γ rays cascade is possible. We tried that using a two detectors apparatus, placed on a goniometer in order to measure the coincidences at various angles ϑ between the two receivers; they were covered with Pb sheets of 1 mm and 2 mm thicknesses, in front and on the sides of the crystal respectively, to avoid Compton γ rays.

We found the ratio $N_{\perp}/N_{\parallel} = 0,79 \pm 0,14$ where N_{\perp} and N_{\parallel} are the rates of coincidence for $\vartheta = 90^{\circ}$ and $\vartheta = 180^{\circ}$ respectively.

In fig. 2 are plotted the experimental points.

In conclusion it seems to us that two new facts have been stated. $^{214}_{84}\text{Po}$ gives a γ rays cascade; this cascade presents an angular correlation (3).

We like to express our deep gratitude to prof. E. PERUCCA for his constant interest and his invaluable help.

(3) A full report on this research will follow in a short time.

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA